Razonamiento Matemático

Primer grado
de Secundaria

Editorial
San Marcos

Lexicom

Intelectum
EVOLUCIÓN

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
PRIMER GRADO DE SECUNDARIA
COLECCIÓN INTELECTUM EVOLUCIÓN

© Ediciones Lexicom S. A. C. - Editor
RUC 20545774519
Jr. Dávalos Lissón 135, Cercado de Lima
Teléfonos: 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
Fax: 330 - 2405
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com
www.editorialsanmarcos.com

Responsable de edición:
Yisela Rojas Tacuri

Equipo de redacción y corrección:
Eder Gamarra Tiburcio / Jhonatan Peceros Tinco /
Josué Dueñas Leyva / Saby Camacho Martinez /
Óscar Díaz Huamán

Diseño de portada:
Miguel Mendoza Cruzado / Cristhian Cabezudo Vicente

Retoque fotográfico:
Luis Armestar Miranda

Composición de interiores:
Miguel Lancho / Carol Clapés Hurtado / Melissa Chau /
Cristhian Cabezudo / Vilma Jacquelín Añazco /
Lourdes Zambrano Ibarra

Gráficos e Ilustraciones:
Juan Manuel Oblitas / Ivan Mendoza Cruzado

Primera edición: 2013
Tiraje: 9000

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2013-18808
ISBN: 978-612-313-114-2
Registro de Proyecto Editorial N.° 31501001300694

Impreso en Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 978 - Lima.
Teléfonos 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com

Impresión:
Industria Gráfica Cimagraf S.A.C.
Psje. Santa Rosa 220 - 226 N.° 220, Santa Angélica, Lima, ATE
RUC 20136492277

Este libro se terminó de imprimir
en la Industria Gráfica Cimagraf S.A.C.
Psje. Santa Rosa 220 - 226 N.° 220, Santa Angélica, Lima, ATE
RUC 20136492277

La COLECCIÓN INTELECTUM EVOLUCIÓN para Secundaria ha sido concebida a partir de los lineamientos pedagógicos establecidos en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular, además se alinea a los patrones y estándares de calidad aprobados en la Resolución Ministerial N.º 0304-2012-ED.
La divulgación de la COLECCIÓN INTELECTUM EVOLUCIÓN se adecúa a lo dispuesto en la Ley 29694, modificada por la Ley N.º 29839, norma que protege a los usuarios de prácticas ilícitas en la adquisición de material escolar.
El docente y el padre de familia orientarán al estudiante en el debido uso de la obra.

INTELECTUM

Razonamiento matemático

Presentación

El vocablo *razonamiento* proviene del verbo *razonar* que significa 'inferir, conjeturar ordenando ideas en la mente para llegar a una conclusión'.

De esta manera podemos afirmar que el razonamiento matemático es aquella disciplina académica que basada en los conocimientos de la matemática busca desarrollar las aptitudes y las habilidades lógicas de los estudiantes para deducir una solución a un problema, para sacar una consecuencia de algo por indicios y conducir a un resultado.

Teniendo en consideración cuán importante es potenciar las habilidades, hemos elaborado el libro de Razonamiento matemático como un instrumento pedagógico que conllevará a esta meta. La estructura de cada libro está diseñada de acuerdo a los nuevos lineamientos de la educación cuyo objetivo es que todos desarrollen la capacidad de pensar, creativa y críticamente y procesen de manera exitosa los conocimientos.

Nuestra propuesta pedagógica se inicia con páginas binarias conformadas por una lectura de contexto matemático que motivará al estudiante a conectarse con este conocimiento al corroborar que le servirá y le será imprescindible en su vida actual y futura. Complementan las binarias la sección *Matemática recreativa*, que propone un problema cuyas pautas para solucionarlo se darán a través de un diálogo entre los personajes de la colección (mediadores cognitivos).

Continúa el *Marco teórico* desarrollado de manera clara y precisa en cuatro unidades, que tienen como soporte los problemas resueltos, donde desarrollamos diversas estrategias que entrenarán las capacidades específicas del estudiante.

Todo este marco teórico es aplicado a la práctica a través de dos secciones:

Actividades de razonamiento, para que el estudiante inicie la aplicación del conocimiento procesado. Al final de cada actividad hay un reto. Y la sección *Refuerza practicando*, que afianzará aún más la práctica con problemas propuestos por niveles, para que el avance sea de modo progresivo y se pueda ser capaz de afrontar nuevos y grandes retos.

Todo lo propuesto en la colección contiene situaciones de aprendizaje variadas que permitirán obtener resultados cualitativos y cuantitativos en el proceso cognoscitivo de los estudiantes.

Nuestro firme propósito es formar jóvenes capacitados, preparados, competitivos, eficientes y eficaces.

¡A esforzarse y a triunfar!

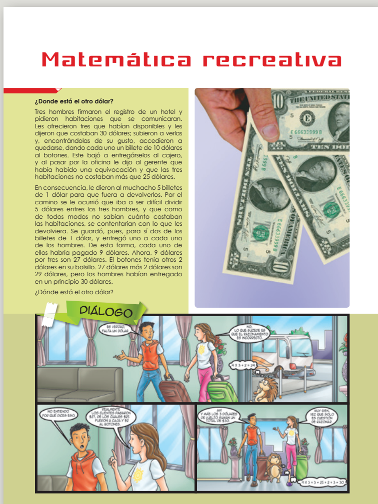
Estructura del libro

Página que inicia la unidad

Conformada por una lectura matemática de contexto cotidiano que conducirá al estudiante a una motivación concreta al comprobar que la matemática está asociada a su entorno real.


UNIDAD 1

Árbol genealógico


Matemática recreativa

DIÁLOGO

Matemática recreativa

Sección que inicia de manera entretenida y divertida los conocimientos con un problema matemático que a través de un diálogo entre los personajes de la colección (mediadores cognitivos) se proporcionarán las pautas para solucionarlo.

Contenido teórico

Compuesto por una variedad de conocimientos enfocados en el razonamiento aritmético, razonamiento algebraico y razonamiento geométrico los que a su vez ponen en práctica el razonamiento lógico abstracto, el razonamiento operativo y el razonamiento organizativo. El desarrollo de cada tema se ha hecho con criterio pedagógico teniendo en cuenta el grado académico.


Cortes, estacas y pastillas

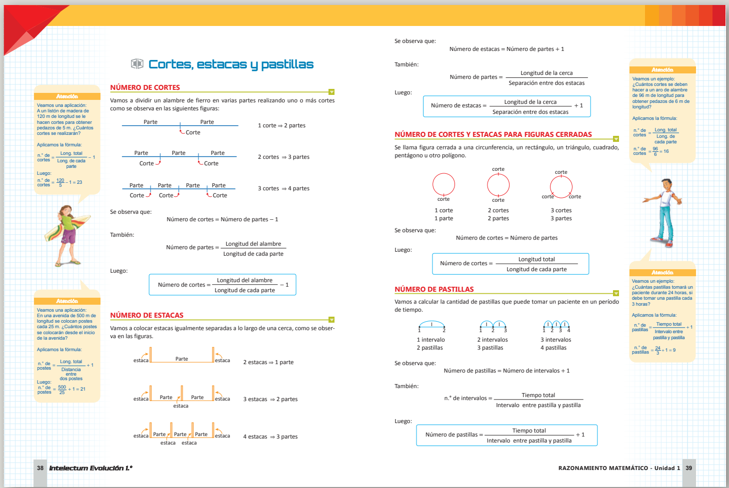
NÚMERO DE CORTES

NÚMERO DE ESTACAS

NÚMERO DE CORTES Y ESTACAS PARA FIGURAS CERRADAS

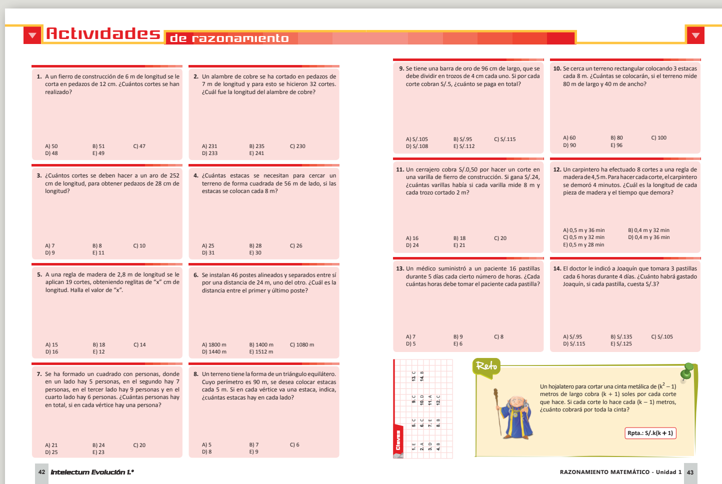
NÚMERO DE PASTILLAS





Problemas resueltos

Gran cantidad de problemas desarrollados por tema donde aplicamos diversas estrategias que entrenarán las capacidades del estudiante.



Actividades de razonamiento

Actividades propuestas para que el estudiante empiece su entrenamieto del conocimiento procesado; son actividades elaboradas también por tema. Al final de cada actividad hay un reto que el alumno debe intentar resolver.



Refuerza practicando

Problemas clasificados en niveles con la finalidad de que el alumno refuerce en forma progresiva y llegue preparado para enfrentarse a grandes y nuevos retos.

Contenido

UNIDAD 1



Árbol genealógico

Un árbol genealógico es una representación gráfica que enlista los antepasados y los descendientes de un individuo en una forma organizada y sistemática, ya sea en forma de árbol o tabla. Puede ser ascendente, exponiendo los antepasados o ancestros de una persona, o descendente, exponiendo todos los descendientes.

Para realizar un árbol genealógico es necesario, primero, llevar a cabo una investigación genealógica o genealogía del individuo.

Dependiendo de la finalidad o uso que se le quiera dar, un árbol genealógico puede referirse solo a la filiación y sucesión masculina, llamada también línea de sangre o linaje, o a la filiación y sucesión femenina, llamada también línea de ombligo.

El árbol genealógico no se aplica solamente en seres humanos; también se utiliza para mostrar el pedigrí de un animal, representar la evolución de una lengua o idioma, seguir la trayectoria de un partido político, una disciplina artística o un arte marcial.

Matemática recreativa

¿Donde está el otro dólar?

Tres hombres firmaron el registro de un hotel y pidieron habitaciones que se comunicaran. Les ofrecieron tres que habían disponibles y les dijeron que costaban 30 dólares; subieron a verlas y, encontrándolas de su gusto, accedieron a quedarse, dando cada uno un billete de 10 dólares al botones. Este bajó a entregárselos al cajero, y al pasar por la oficina le dijo al gerente que había habido una equivocación y que las tres habitaciones no costaban más que 25 dólares.

En consecuencia, le dieron al muchacho 5 billetes de 1 dólar para que fuera a devolverlos. Por el camino se le ocurrió que iba a ser difícil dividir 5 dólares entres los tres hombres, y que como de todos modos no sabían cuánto costaban las habitaciones, se contentarían con lo que les devolviera. Se guardó, pues, para sí dos de los billetes de 1 dólar, y entregó uno a cada uno de los hombres. De esta forma, cada uno de ellos habría pagado 9 dólares. Ahora, 9 dólares por tres son 27 dólares. El botones tenía otros 2 dólares en su bolsillo. 27 dólares más 2 dólares son 29 dólares, pero los hombres habían entregado en un principio 30 dólares.

¿Dónde está el otro dólar?



DIÁLOGO



Planteo de ecuaciones

Plantear una ecuación significa traducir el enunciado de un problema de un lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático, es decir, transformar el enunciado a una ecuación.

ENUNCIADO		ECUACIÓN
Lenguaje cotidiano	Traducir →	Lenguaje matemático

A continuación veamos algunos ejemplos de traducción al lenguaje matemático.

	Enunciado del lenguaje cotidiano	Lenguaje matemático
1	La edad de Melanie.	x
2	El sueldo de Pamela aumentado en S/.50	$x + 50$
3	El triple de mi dinero.	$3x$
4	La mitad de sus ahorros.	$x/2$
5	El cuadrado de un número.	x^2
6	El doble de un número, aumentado en 7	$2x + 7$
7	El doble de un número aumentado en 7	$2(x + 7)$
8	El triple de mi dinero, disminuido en 13	$3x - 13$
9	El triple de mi dinero disminuido en 13	$3(x - 13)$
10	El cubo de un número aumentado en 5	$(x + 5)^3$
11	Jorge tiene el doble de la edad de Manuel.	Jorge = $2x$ Manuel = x
12	Melanie tiene la tercera parte de la edad de Jorge.	Melanie = $x/3$ o Melanie = x Jorge = x Jorge = $3x$
13	La diferencia de dos números es 15	$x - y = 15$
14	Dos números pares consecutivos.	n.° menor = x n.° mayor = $x + 2$
15	Tres números enteros consecutivos.	n.° menor = x n.° intermedio = $x + 1$ n.° mayor = $x + 2$

Pasos a seguir en la solución de un problema

Para el planteo y resolución de ecuaciones de un problema, se debe tener en cuenta el siguiente procedimiento:

1. Traducir el enunciado al lenguaje matemático (plantear la ecuación).
2. Resolver la ecuación.
3. Responder la pregunta que plantea el enunciado (el valor de la incógnita no necesariamente es la respuesta del problema).

Atención

Por lo general, en las ecuaciones se emplea la variable x para representar una cantidad.
Ejemplo:
Mi edad: "x"



Importante

Se puede relacionar una variable a dos o más cantidades.
Ejemplos:

- "A" tiene el triple que "B"
  A = 3x
  B = x
- Dos números enteros consecutivos.
  n.° menor = x
  n.° mayor = x + 1
- Tres números impares consecutivos.
  n.° menor = x
  n.° intermedio = x + 2
  n.° mayor = x + 4
  o
  n.° menor = x – 2
  n.° intermedio = x
  n.° mayor = x + 2



Atención

Sea "x" un número, entonces se tiene:
Su doble = 2x
Su triple = 3x
Su cuádruple = 4x
Su quíntuple = 5x

Problemas resueltos

1 La suma de 3 números pares consecutivos es 216, halla el mayor de dichos números.

Resolución:

Sean los números: x, $x + 2$ y $x + 4$

Por dato: $x + x + 2 + x + 4 = 216$

$3x + 6 = 216$

$3x = 210 \Rightarrow x = 70$

Luego: n.° mayor $= x + 4$

$= 70 + 4 = 74$

2 El triple de un número, aumentado en su quíntuple es 160. Halla dicho número aumentado en 5.

Resolución:

Sea el número: x

El triple: $3x$

El quíntuple: $5x$

Del dato: $3x + 5x = 160$

$8x = 160 \Rightarrow x = 20$

Piden: $x + 5 = 20 + 5 = 25$

3 La suma de 2 números es 45 y su diferencia es 5, halla el mayor de dichos números.

Resolución:

Sean los números: a y b

Por dato: $\left.\begin{aligned} a + b &= 45 \\ a - b &= 5 \end{aligned}\right\} (+)$

$2a = 50 \Rightarrow a = 25$

Luego: $b = 20$

$\therefore$ n.° mayor $= 25$

4 Dentro de 5 años tendré el doble de la edad que tenía hace 5 años. ¿Qué edad tendré dentro de 3 años?

Resolución:

Edad actual: x

Hace 5 años: $x - 5$

Dentro de 5 años: $x + 5$

Por condición del problema:

$x + 5 = 2(x - 5)$

$x + 5 = 2x - 10$

$x = 15$

$\therefore$ Dentro de 3 años tendré: $15 + 3 = 18$ años

5 Si al cuádruple de un número, le disminuimos 13 unidades, se obtiene el doble de la misma cantidad, aumentado en 5 unidades. ¿Cuál es el número?

Resolución:

Sea el número: x

Cuádruple, disminuido en 13: $4x - 13$

Doble, aumentado en 5: $2x + 5$

Por dato: $4x - 13 = 2x + 5$

$2x = 18 \Rightarrow x = 9$

$\therefore$ El número es 9.

6 Sabiendo que el doble de un número aumentado en 3, es igual al triple del número disminuido en 3. Halla el número.

Resolución:

Sea el número: x

Doble aumentado en 3: $2(x + 3)$

Triple disminuido en 3: $3(x - 3)$

Por dato: $2(x + 3) = 3(x - 3)$

$2x + 6 = 3x - 9$

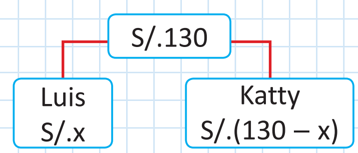
$x = 15$

$\therefore$ El número es 15.

7 Luis y Katty tienen juntos S/.130, si Luis le diera S/.25 a Katty ambos tendrían la misma cantidad. ¿Cuánto tiene Luis?

Resolución:

Hacemos un esquema:



Dato: Luis le da S/.25 a Katty

Luis tendrá: $x - 25$

Katty tendrá: $130 - x + 25$

Por condición del problema:

$x - 25 = 130 - x + 25$

$2x = 180 \Rightarrow x = 90$

$\therefore$ Luis tiene S/.90.

8 Paco y Lucas tienen juntos S/.800; si Lucas tiene S/.80 más que Paco, ¿cuánto tiene Paco?

Resolución:

Dato: Lucas tiene S/.80 más que Paco
Paco: x
Lucas: $x + 80$
Por condición del problema:
$x + x + 80 = 800$
$2x = 720 \Rightarrow x = 360$
$\therefore$ Paco tiene S/.360.

9 Si a la cuarta parte de un número se le suma 19 unidades se obtiene el quíntuple de dicho número. El número es:

Resolución:

Sea el número: $4x$
La cuarta parte: x
El quíntuple: $5(4x) = 20x$
Por dato: $x + 19 = 20x$
$19x = 19 \Rightarrow x = 1$
El número es: $4x$
$4(1) = 4$

10 La suma de dos números consecutivos es igual a la cuarta parte del primero, más los cinco tercios del segundo. Da como respuesta el mayor de dichos números.

Resolución:

Sean los números consecutivos: x y $x + 1$
Cuarta parte del primero: $\frac{x}{4}$
Cinco tercios del segundo: $\frac{5}{3}(x+1)$
Por condición del problema:
$$x + x + 1 = \frac{x}{4} + \frac{5}{3}(x+1)$$
$$2x + 1 = \frac{3x + 20(x+1)}{12}$$
$$24x + 12 = 3x + 20x + 20$$
$$x = 8$$
$\therefore$ n.° mayor: $x + 1$
$8 + 1 = 9$

11 La suma de 2 números es 208 y son entre sí como 6 es a 7. ¿Cuál es el menor?

Resolución:

Sean: a y b los números
Por dato: $a + b = 208$ ...(1)
Además: $\frac{a}{b} = \frac{6}{7} \Rightarrow a = 6k;\ b = 7k$
Reemplazamos en (1):
$6k + 7k = 208$
$13k = 208 \Rightarrow k = 16$
$\therefore$ Menor $= 6k = 6(16) = 96$

12 El cociente de 2 números es 5 y el residuo es 52. Si su diferencia es 288, ¿cuales son los números?

Resolución:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline & 5 \\ 52 & \end{array}$$

Luego: $a = 5b + 52$ ...(1)
también: $a - b = 288$ ...(2)
Reemplazamos (1) en (2):
$5b + 52 - b = 288$
$4b = 236$
$b = 59 \Rightarrow a = 347$
$\therefore$ Los números son 347 y 59.

13 En un aula de secundaria hay 30 alumnos entre varones y damas. La diferencia entre el triple de varones y el doble de damas es cero. ¿Cuántos varones hay?

Resolución:

Sean: V: número de varones
D: número de damas
Por dato: $V + D = 30$ ...(1)
$3V - 2D = 0$
$3V = 2D$
$$\frac{V}{D} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{array}{l} V = 2k \\ D = 3k \end{array}$$
Reemplazamos en (1): $2k + 3k = 30$
$5k = 30 \Rightarrow k = 6$
$\therefore V = 2(6) = 12$

Actividades de razonamiento

1. La suma de tres números consecutivos es 33. Halla el mayor de ellos.

A) 15 B) 12 C) 13
D) 10 E) 14

2. El cuádruple de la tercera parte de un número, aumentado en su novena parte es igual a 13. Indica el triple de dicho número.

A) 21 B) 24 C) 27
D) 30 E) 33

3. El quíntuple de un número aumentado en 2, más el triple de dicho número disminuido en dos es igual al quíntuple del número aumentado en 11. Halla el triple de dicho número.

A) 17 B) 51 C) 43
D) 34 E) 71

4. Dados tres números consecutivos, si la octava parte del menor, aumentado en la tercera parte del intermedio, más la mitad del mayor, resulta el menor de ellos. ¿Cuál es la suma de dichos números?

A) 42 B) 99 C) 63
D) 51 E) 81

5. Si se suma a 19, la cuarta parte de un número, la suma es 5 veces dicho número. El número es:

A) 3 B) 5 C) 4
D) 6 E) 7

6. Ana tiene 8 años más que María. Si ambas edades suman 96 años, ¿qué edad tiene Ana?

A) 52 B) 54 C) 29
D) 50 E) 96

7. Vilma y Rosa juntas tienen S/.140. Si Vilma le diera S/.20 a Rosa, ambas tendrían igual cantidad de dinero. ¿Cuánto tiene Vilma?

A) S/.60 B) S/.70 C) S/.90
D) S/.80 E) S/.100

8. Compré una mochila y un pantalón a S/.77. Si el pantalón me costó S/.17 más que la mochila, ¿cuánto me costó la mochila?

A) S/.30 B) S/.47 C) S/.52
D) S/.67 E) S/.17

9. María ahorró en enero los 3/5 de lo que ahorró en febrero. Si la suma de ambas cantidades es S/.128, ¿cuánto ahorró en enero?

A) S/.80 B) S/.48 C) S/.78
D) S/.15 E) S/.25

10. Nueve veces un número, disminuido en sus 3/2 da como resultado 30. Da dicho número disminuido en 2.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 8 E) 6

11. Andrea fue a una tienda comercial con S/.200 y lo que gastó es igual a los 5/3 de lo que le quedó. ¿Cuánto gastó?

A) S/.125 B) S/.75 C) S/.50
D) S/.90 E) S/.80

12. Elvis y Kelly tienen juntos S/.230; si Elvis le diera S/.30 a Kelly ambos tendrían la misma cantidad, ¿cuánto tiene Elvis?

A) S/.200 B) S/.100 C) S/.145
D) S/.180 E) S/.130

13. Se reparten S/.525 entre tres personas de manera que la segunda tenga S/.40 menos que la primera y la tercera S/.45 más que la primera y la segunda juntas. ¿Cuánto le corresponde a la tercera?

A) S/.180 B) S/.285 C) S/.150
D) S/.300 E) S/.280

14. Se desea repartir S/.342 entre tres personas, de tal modo que a la segunda le toque el doble de la primera, y a la tercera el triple de la primera.
¿Cuánto le tocaría a la tercera persona?

A) S/.140 B) S/.104 C) S/.114
D) S/.57 E) S/.171

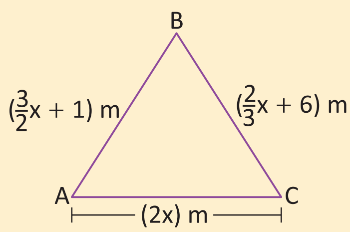
Claves

1. B
2. C
3. B
4. B
5. C
6. A
7. C
8. A
9. B
10. A
11. A
12. C
13. B
14. E

Reto



De la figura adjunta, ABC es un triángulo isósceles (AB = BC), calcula el perímetro.



Rpta.: 32 m

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. En un corral de conejos y gallinas el número de ojos es 24 menos que el número de patas. Halla el número de conejos.

A) 6 B) 10 C) 12 D) 16 E) 15

2. Se reunieron varios amigos quienes tomaron cuatro tazas de leche y dos tazas de café, y tuvieron que pagar S/.20. Si en otra oportunidad, consumiendo una taza de leche y tres tazas de café; pagaron S/.10. Entonces una taza de leche cuesta:



A) S/.2,5 B) S/.3 C) S/.4
D) S/.5 E) S/.6

3. Si en 7 horas 30 minutos una costurera puede confeccionar un pantalón y tres camisas o 2 pantalones y una camisa. ¿En cuánto tiempo puede confeccionar un pantalón y una camisa?

A) 3 horas B) 3 horas 30 min
C) 4 horas D) 4 horas 30 min
E) 5 horas

4. En el primer piso de una biblioteca hay 500 mil libros, en el segundo piso hay 300 mil y en el tercer piso 100 mil. ¿Cuántos libros deben trasladarse del primero al tercer piso para que en el primer piso haya tantos libros como en el segundo y tercer piso?

A) 20 mil B) 50 mil C) 100 mil
D) 75 mil E) 150 mil

5. En dos salones hay el mismo número de alumnos. Si por cada 4 alumnos que salen del primer salón salen 7 del segundo salón. ¿Cuántos alumnos había inicialmente en cada salón si al final quedan 28 en el primer salón y 4 en el segundo salón?

A) 50 B) 68 C) 60 D) 64 E) 48

6. Los ángulos interiores de un pentágono son proporcionales a 5 números consecutivos. Halla uno de los ángulos del pentágono.

A) 72° B) 100° C) 108° D) 90° E) 120°

7. Dos números suman 94 y si dividimos al mayor entre el menor obtenemos 3 de cociente y 14 de residuo. ¿En cuánto excede el mayor al menor?

A) 74 B) 50 C) 64 D) 54 E) 48

8. Un número excede a otro en 36 unidades y si dividimos el mayor entre el menor obtenemos 3 de cociente y 2 de residuo. Halla el menor de dichos números.

A) 13 B) 15 C) 17 D) 21 E) 23

NIVEL 2

9. Halla la suma de las cifras del número cuya mitad, más el doble, más la tercera parte, más el triple dan 70.

UNMSM 2004-II

A) 5 B) 7 C) 12 D) 4 E) 3

(10) Un padre le dice a su hijo: "Te daré 1000 soles en lugar de 800 soles si sabes entre qué número divido 800 para que dé 1000". El número es:

UNMSM-2004 II

A) 2/3 B) 4/3 C) 4/5 D) 5/4 E) 3/4

(11) Un granjero compró 5 caballos y 3 burros. Si hubiera comprado un caballo menos y un burro más, habría gastado S/.5000 menos. ¿En cuánto difieren el precio de un caballo y el de un burro?



A) S/.5000 B) S/.10 000 C) S/.2500
D) S/.15 000 E) S/.8000

(12) Se tiene un examen de 350 preguntas de las cuales 50 son de matemática, suponiendo que a cada pregunta de matemática se da el doble de tiempo que a cada pregunta no relacionada con esta materia. ¿Cuánto se demorará un alumno en resolver las preguntas de matemática si el examen dura tres horas?

A) 45 min B) 52 min C) 62 min
D) 60 min E) 24 min

(13) Si a un número se le quita 30 unidades, quedan los $\frac{3}{5}$ del número. ¿Qué cantidad se le debe quitar al número inicial para que queden los $\frac{2}{3}$ del mismo?

A) 10 B) 18 C) 15 D) 20 E) 25

(14) Si A y B suman 123 y si dividimos a A entre el exceso de A sobre B obtenemos 2 de cociente y 6 de residuo. Halla A.

A) 75 B) 78 C) 80 D) 82 E) 85

(15) Si $\begin{array}{l|l} x & y \\ \hline 9 & 2 \end{array}$, además $\begin{array}{l|l} (x+y) & x-y \\ \hline 18 & 2 \end{array}$

Halla x.

A) 63 B) 67 C) 71 D) 79 E) 83

(16) La suma de 3 números es 6, si el doble del primero, más el segundo, es igual al triple del tercero, aumentado en 5; además se sabe que el triple del primero menos el tercero es igual al segundo aumentado en 6. Entonces el doble del primero más el triple del segundo es:

A) 13 B) 12 C) 5 D) 7 E) 11

(17) Si un número de 2 cifras, aumentado en 13, se le divide por el doble de la cifra de las unidades se obtiene 5 de cociente y 9 de residuo. Halla el número.

A) 74 B) 47 C) 56 D) 65 E) 83

NIVEL 3

(18) Para ensamblar 50 vehículos, entre bicicletas, motocicletas y automóviles, se utilizaron entre otros elementos 38 motores y 148 llantas. ¿Cuántas motocicletas se ensamblaron?



A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 24

19. El cuadrado de la suma de las dos cifras que componen un número es igual a 121. Si de este cuadrado se resta el cuadrado de la primera cifra y el doble del producto de las dos cifras; se obtiene 81. ¿Cuál es el número?

A) 65 B) 56 C) 47 D) 38 E) 29

20. Hoy gané S/.1 más que ayer y lo que he ganado en los dos días es S/.25 más que los $\frac{2}{5}$ de lo que gané ayer. ¿Cuánto gané ayer?

A) S/.15 B) S/.16 C) S/.14 D) S/.17 E) S/.13

21. La suma de dos números es S, si se añade N al menor y se le quita N al mayor, su relación geométrica se invierte. Halla el menor.

A) $\frac{S-N}{2}$ B) $\frac{S+N}{2}$ C) S – N

D) S – N E) 2(S – N)

22. A un número le agregamos un tercio de su valor, luego a este resultado lo multiplicamos por un octavo del número inicial y por último a este resultado se le quita el sexto del número inicial. Si el resultado de toda esta operación es 2, halla el número inicial.

A)5 B)4 C) $4\frac{1}{4}$ D) $3\frac{1}{3}$ E)3

23. Se divide un mismo número entre 2 números consecutivos, obteniéndose en ambos casos 45 de cociente. Si los dos residuos suman 73, uno de ellos es:

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 24

24. Indica en cuánto aumenta el área de un rectángulo de perímetro 2p cuando cada uno de sus lados aumenta en x. (Área del rectángulo = base × altura, el perímetro es la suma de sus 4 lados).

A) $x^2 + px$ B) $x^2 - px$ C) $(x + p)^2$

D) $x^2 - p^2$ E) $x^2 - 2px + p^2$

25. Si escribo a la derecha de un número las cifras x, y; este número aumenta en a unidades. ¿Cuál es ese número?

A) a – 10x – y B) $\frac{a+10x+y}{99}$

C) $\frac{a-10x-y}{11}$ D) $\frac{a-10x-y}{99}$

E) a + 10x – y

26. Dos números A y B están en relación de m a n, si a A le aumenté n, ¿cuánto debo de aumentar a B para que se mantenga la relación?

A) m^2 B) $\frac{n}{m}$ C) $\frac{n^2}{m}$ D) m^3 E) $\frac{m^3}{n}$

Claves

NIVEL 1	8. C	15. A	22. B
1. C	NIVEL 2	16. B	23. B
2. C	9. E	17. C	24. A
3. D	10. C	NIVEL 3	25. D
4. B	11. A	18. C	26. C
5. C	12. A	19. E	
6. C	13. E	20. A	
7. D	14. C	21. A	

Edades

Observación

La edad que tenía hace 5 años, siendo "x" mi edad actual, era: $x - 5$



Observación

La edad que tendré dentro de 8 años, siendo "x" mi edad actual, será: $x + 8$



Nota

Cuando en un problema intervienen dos o más individuos, se recomienda utilizar cuadros de doble entrada, con el propósito de relacionar y ordenar los datos.

ELEMENTOS

Individuos

Son los protagonistas del problema, a quienes corresponden las edades y que intervienen en el problema.

Ejemplo:
Saby es 6 años menor que Marco, pero 2 años mayor que Eder.

Tiempo

Es uno de los elementos más importantes, ya que las condiciones del problema ocurren en tiempos diferentes (pasado, presente y futuro).

Tiempo	Expresiones
Pasado	Tenía; tenías; tuvo
Presente	Tengo; tienes; tiene
Futuro	Tendré; tendrás; tendrá

Edad

La edad representa el tiempo de vida de un individuo.

Ejemplo:
Hoy tengo 16 años y dentro de 4 años tendré el doble de la edad que tenía hace 6 años.
Para un mejor estudio clasificaremos los problemas en dos tipos:

Tipo I: cuando interviene la edad de un solo individuo.
Ejemplo:

Hace 5 años (Pasado → Presente) Dentro de 7 años (Presente → Futuro)

Pasado	Presente	Futuro
$x - 5$	x	$x + 7$

Tipo II: cuando intervienen las edades de dos o más individuos.
Ejemplo:

Hace 3 años (Pasado → Presente) Dentro de 5 años (Presente → Futuro)

	Pasado	Presente	Futuro
A	21	24	29
B	16	19	24

Observación:

- La diferencia de edades entre 2 personas es constante en el tiempo.
  En el pasado: $21 - 16 = 5$
  En el presente: $24 - 19 = 5$
  En el futuro: $29 - 24 = 5$
- La suma en aspa de valores ubicados simétricamente es constante.
  $21 + 19 = 16 + 24$
  $24 + 24 = 19 + 29$
  $21 + 24 = 16 + 29$

Problemas resueltos

1 La edad de la tía de Luis actualmente es el quíntuple de la edad que tenía hace 52 años, ¿qué edad tiene la tía de Luis?

Resolución:

Construimos un cuadro:

	Hace 52 años	Edad actual
Tía de Luis	$x - 52$	x

Por dato del problema:

$x = 5(x - 52)$

$x = 5x - 260$

$260 = 4x \Rightarrow x = 65$

$\therefore$ La tía de Luis tiene 65 años.

2 Actualmente mi edad es la cuarta parte de la edad que tendré dentro de 45 años. ¿Qué edad tengo actualmente?

Resolución:

Hacemos un cuadro:

	Edad actual	Dentro de 45 años
Yo	x	$x + 45$

Por dato del problema:

$x = \dfrac{x + 45}{4}$

$4x = x + 45$

$3x = 45 \Rightarrow x = 15$

$\therefore$ Actualmente tengo 15 años.

3 Si la edad que tendrá Paolín dentro de 6 años es el cuádruple de la edad que él tuvo hace 12 años. ¿Qué edad tiene Paolín actualmente?

Resolución:

Realizamos un cuadro:

	Hace 12 años	Edad actual	Dentro de 6 años
Paolín	$x - 12$	x	$x + 6$

Por dato del problema:

$x + 6 = 4(x - 12)$

$x + 6 = 4x - 48$

$54 = 3x \Rightarrow x = 18$

$\therefore$ Paolín tiene 18 años.

4 La edad de Paco hace 6 años fue la mitad de la edad que tendrá dentro de 9 años. ¿Qué edad tiene Paco?

Resolución:

Realizamos un cuadro:

	Hace 6 años	Edad actual	Dentro de 9 años
Paco	$x - 6$	x	$x + 9$

Por dato del problema: $x - 6 = \dfrac{x + 9}{2}$

$2x - 12 = x + 9$

$x = 21$

$\therefore$ Paco tiene 21 años.

5 Si al doble de la edad que mi tío Antonio tendrá dentro de 5 años le resto el doble de la edad que tenía hace 5 años, el resultado equivale a su edad. ¿Qué edad tiene mi tío Antonio?

Resolución:

Hacemos un cuadro:

	Hace 5 años	Edad actual	Dentro de 5 años
Tío Antonio	$x - 5$	x	$x + 5$

Por dato del problema:

$2(x + 5) - 2(x - 5) = x$

$2x + 10 - 2x + 10 = x$

$x = 20$

$\therefore$ Mi tío Antonio tiene 20 años.

6 La mitad de la edad de Beto equivale a la diferencia entre la edad que tendrá dentro de 10 años y la edad que tenía hace 10 años. ¿Qué edad tiene Beto?

Resolución:

Realizamos un cuadro:

	Hace 10 años	Edad actual	Dentro de 10 años
Beto	$x - 10$	x	$x + 10$

Por dato del problema: $\dfrac{x}{2} = (x + 10) - (x - 10)$

$\dfrac{x}{2} = x + 10 - x + 10$

$\dfrac{x}{2} = 20 \Rightarrow x = 40$

$\therefore$ Beto tiene 40 años.

7 La edad de César es el cuádruple de la edad de Luz. Si hace 4 años la edad de César era 6 veces la edad que tenía Luz en ese tiempo, ¿qué edad tiene Luz?

Resolución:

Realizamos un cuadro:

	Hace 4 años	Edad actual
César	$4x - 4$	$4x$
Luz	$x - 4$	x

Por dato del problema: $4x - 4 = 6(x - 4)$

$4x - 4 = 6x - 24$

$20 = 2x \Rightarrow x = 10$

$\therefore$ Luz tiene 10 años.

8 Dentro de 4 años la edad de Ana será el triple de la edad de Betty en ese tiempo. Si actualmente Ana tiene el cuádruple de la edad que tiene Betty, ¿qué edad tiene Ana?

Resolución:

Hacemos un cuadro:

	Edad actual	Dentro de 4 años
Ana	$4x$	$4x + 4$
Betty	x	$x + 4$

Por condición del problema: $4x + 4 = 3(x + 4)$

$4x + 4 = 3x + 12$

$x = 8$

$\therefore$ La edad de Ana será: $4(8) = 32$

9 Ángel tiene el triple de la edad de Beto. Si la edad de Beto dentro de 4 años será la mitad de la edad que tenía Ángel hace 4 años. ¿Qué edad tiene Beto?

Resolución:

Según los datos se tiene:

	Hace 4 años	Edad actual	Dentro de 4 años
Ángel	$3x - 4$	$3x$	
Beto		x	$x + 4$

Por condición del problema: $x + 4 = \dfrac{3x - 4}{2}$

$2x + 8 = 3x - 4$

$x = 12$

$\therefore$ La edad de Beto es 12 años.

10 Dentro de 5 años mi edad será igual a la edad que tú tienes actualmente y al sumar nuestras edades en ese entonces, se obtendría 55 años. ¿Cuál es mi edad?

Resolución:

Según los datos se tiene:

	Edad actual	Dentro de 5 años
Yo	$x - 5$	x
Tu	x	$55 - x$

(+5 en cada fila)

Por condición del problema:

$x + 5 = 55 - x$

$2x = 50 \Rightarrow x = 25$

$\therefore$ Mi edad actual será: $25 - 5 = 20$

11 Rosa tiene 6 años y su mamá 27 años. ¿Hace cúantos años Rosa tuvo la octava parte de la edad de su mamá?

Resolución:

Hacemos un cuadro:

	Hace x años	Edad actual
Rosa	$6 - x$	6
Mamá	$27 - x$	27

Por dato del problema: $6 - x = \dfrac{(27 - x)}{8}$

$48 - 8x = 27 - x$

$21 = 7x \Rightarrow x = 3$

$\therefore$ Hace 3 años.

12 María y Julia tienen actualmente "A" y "B" años respectivamente. ¿Hace cuántos años la relación de sus edades era como 4 es a 3?

Resolución:

Hacemos un cuadro:

	Hace x años	Edad actual
María	$A - x$	A
Julia	$B - x$	B

Por dato del problema: $\dfrac{A - x}{B - x} = \dfrac{4}{3}$

$3A - 3x = 4B - 4x$

$x = 4B - 3A$

$\therefore$ Hace $(4B - 3A)$ años.

Actividades de razonamiento

1. Si dentro de 18 años Juan tendrá el triple de lo que tiene hoy. ¿Cuántos años tiene Juan?

A) 7 años B) 12 años C) 8 años
D) 9 años E) 10 años

2. ¿Cuántos años tiene Pepito, sabiendo que hace 10 años tuvo la tercera parte de lo que tiene hoy?

A) 15 años B) 5 años C) 12 años
D) 10 años E) 87 años

3. Dentro de 15 años tendré 2 veces la edad que tenía hace 5 años. ¿Qué edad tengo?

A) 20 años B) 10 años C) 12 años
D) 18 años E) 25 años

4. Si dentro de 8 años tendré 3 veces la edad que tenía hace 2 años. ¿Qué edad tendré dentro de 10 años?

A) 12 años B) 17 años C) 15 años
D) 10 años E) 20 años

5. Antonio tiene 45 años. ¿Dentro de cuántos años tendrá el doble de edad que tenía hace 15 años?

A) 12 años B) 18 años C) 15 años
D) 10 años E) 20 años

6. Miguel tiene 5 años menos que Doris. Hace 4 años la suma de sus edades era 21 años. ¿Qué edad tiene Doris?

A) 20 años B) 15 años C) 12 años
D) 17 años E) 10 años

7. La edad de Rosa es 3 veces mayor que la edad de Jesús. Hace 5 años la suma de sus edades era 40 años. ¿Qué edad tiene Jesús?

A) 10 años B) 15 años C) 8 años
D) 12 años E) 20 años

8. Manuel tiene el triple de la edad de Sara que tiene 12 años. ¿Cuántos años pasarán para que la edad de Manuel sea el doble de la edad de Sara?

A) 17 años B) 20 años C) 25 años
D) 15 años E) 12 años

9. Dentro de 60 años tendré tres veces la edad que tuve hace 20 años. ¿Qué edad tengo actualmente?

A) 20 años B) 10 años C) 30 años
D) 60 años E) 40 años

10. Hugo es 9 años menor que Marcos. Si actualmente sus edades suman 41, ¿qué edad tiene Marcos?

A) 25 años B) 17 años C) 34 años
D) 15 años E) 30 años

11. Dentro de 4 años la suma de las edades de Juan y Rita será 38 años. Si Juan es mayor que Rita por 2 años, ¿qué edad tuvo Rita hace 5 años?

A) 5 años B) 9 años C) 15 años
D) 12 años E) 20 años

12. La edad de Luis es el cuádruple de la edad de Kelly. Si hace 5 años la edad de Luis era 7 veces la edad que tenía Kelly en ese tiempo, ¿qué edad tiene Kelly?

A) 5 años B) 15 años C) 13 años
D) 8 años E) 10 años

13. En la actualidad tengo 15 años, ¿hace cuántos años tuve la tercera parte de la edad que tendré dentro de 12 años?

A) 5 años B) 7 años C) 6 años
D) 8 años E) 10 años

14. Naty es 10 años más joven que Miguel. Hace 5 años, Miguel tenía el triple de la edad que Naty tenía aquel entonces. Encuentra la edad de Miguel.

A) 20 años B) 12 años C) 18 años
D) 10 años E) 15 años

Claves

1. D	5. C	9. D	13. C
2. A	6. D	10. A	14. A
3. E	7. A	11. B	
4. B	8. E	12. E	

Reto



Un amigo de mi hijo Juan le dijo: “Anteayer tenía 19 años y el año que viene tendré 22 años”. ¿Es esto posible?

Rpta.: Sí es posible.

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. La edad actual de Pedro es el cuádruple de la edad que tuvo hace 27 años. ¿Qué edad tiene Pedro?
   A) 19 años B) 25 años C) 28 años
   D) 36 años E) 30 años

2. Alejandro tendrá dentro de 40 años seis veces la edad que él tiene actualmente. ¿Cuál es su edad actual?
   A) 10 años B) 12 años C) 11 años
   D) 7 años E) 8 años

3. La edad que tenía Liz hace 18 años era la tercera parte de la edad que tiene actualmente. ¿Qué edad tiene Liz?
   A) 27 años B) 22 años C) 30 años
   D) 25 años E) 29 años

4. La edad de Luz es tal que equivale al triple de la edad que tenía hace 8 años. ¿Cuál será su edad dentro de 6 años?
   A) 10 años B) 12 años C) 20 años
   D) 13 años E) 18 años

5. La edad de Luis es el doble de la edad que tuvo hace 7 años, ¿cuál es la edad de Luis?
   A) 17 años B) 14 años c) 18 años
   D) 16 años E) 20 años

6. La edad de Héctor dentro de 12 años, será el doble de la edad que tuvo hace 3 años. ¿Cuál es la edad de Héctor?
   A) 16 años B) 20 años C) 17 años
   D) 18 años E) 25 años

7. La edad de Juana dentro de 20 años, será el cuádruple de la edad que tuvo hace 4 años. ¿Cuál es la edad de Juana?
   A) 20 años B) 10 años C) 12 años
   D) 18 años E) 14 años

8. ¿Qué edad tiene Paúl, sabiendo que la edad que tendrá dentro de 15 años será igual al triple de la edad que tenía hace 5 años?
   A) 20 años B) 17 años C) 18 años
   D) 13 años E) 15 años

9. La edad de Ismael hace 6 años era la mitad de la edad que tendrá dentro de 9 años. ¿Qué edad tiene Ismael?
   A) 21 años B) 17 años C) 31 años
   D) 30 años E) 12 años

10. Si al restarle el triple de la edad que mi hermana tenía hace 4 años al triple de la edad que ella tendrá dentro de 4 años, se obtiene como resultado el doble de su edad. ¿Qué edad tiene mi hermana?
    A) 14 años B) 16 años C) 20 años
    D) 12 años E) 18 años

NIVEL 2

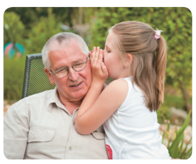
11. Hace 10 años la edad de un padre era el triple de la edad de su hijo. Actualmente la edad del padre solo es el doble. ¿Cuál es la edad del hijo?

A) 25 años B) 23 años C) 15 años
D) 18 años E) 20 años

12. Hace 20 años la edad de un padre era el cuádruple de la edad de su hijo; actualmente solo es el doble. ¿Cuál es la edad del padre?

A) 48 años B) 55 años C) 45 años
D) 60 años E) 50 años

13. Al preguntarle a mi abuelito por su edad, me respondió:



"Sí al cuádruple de la edad que tendré dentro de 5 años le restas el cuádruple de la edad que tuve hace 10 años, obtendrás mi edad". ¿Cuál es la edad de mi abuelito?

A) 60 años B) 80 años C) 75 años
D) 50 años E) 70 años

14. Dentro de 8 años la edad de Diana será el doble de la edad de Lourdes en ese tiempo. Si actualmente Diana tiene el triple de la edad que tiene Lourdes. ¿Qué edad tiene Diana?

A) 21 años B) 18 años C) 24 años
D) 15 años E) 20 años

15. María tiene el triple de la edad de Jesús. Si dentro de 5 años la edad de María será el doble de la edad que Jesús tendrá en ese entonces. ¿Qué edad tiene María?

A) 22 años B) 15 años C) 18 años
D) 25 años E) 20 años

16. La mitad de la edad de Beto equivale a la diferencia entre la edad que tendrá dentro de 10 años y la edad que tenía hace 10 años. ¿Qué edad tiene Beto?

A) 35 años B) 45 años C) 50 años
D) 40 años E) 37 años

17. Sabiendo que si al quíntuple de la edad que tendrá Manuel dentro de 2 años le restamos el quíntuple de la edad que tuvo hace 2 años, obtenemos la edad que tendrá dentro de 8 años ¿Qué edad tiene Manuel?

A) 22 años B) 17 años C) 12 años
D) 19 años E) 20 años

18. Al preguntarle a un alumno por su edad, este respondió: "Si al doble de la edad que tendré dentro de 3 años le restas el doble de la edad que tuve hace 3 años, obtienes mi edad". ¿Cuál es la edad del alumno?

A) 12 años B) 11 años C) 10 años
D) 13 años E) 8 años

19. Si al triple de la edad que mi tío Andrés tendrá dentro de 6 años le resto el triple de la edad que tenía hace 6 años, el resultado equivale a su edad. ¿Qué edad tiene mi tío Andrés?

A) 35 años B) 36 años C) 32 años
D) 40 años E) 30 años

20. Yo tengo el doble de tu edad. Si mi edad dentro de 5 años será el triple de la edad que tú tenías hace 7 años, ¿qué edad tengo?

A) 45 años B) 52 años C) 48 años
D) 37 años E) 38 años

NIVEL 3

21. Halla la edad de Gisela, sabiendo que si a la tercera parte de la edad que tendrá dentro de 3 años le restamos la tercera parte de la edad que tenía hace 3 años, se obtiene como resultado la novena parte de su edad actual.

A) 23 años B) 27 años C) 25 años
D) 18 años E) 20 años

22. Actualmente mi edad es la cuarta parte de la edad que tendré dentro de 45 años. ¿Qué edad tengo actualmente?

A) 22 años B) 25 años C) 18 años
D) 15 años E) 37 años

23. Si al restarle el cuádruple de la edad que mi hija tenía hace 8 años del quíntuple de la edad que ella tendrá dentro de 2 años, se obtiene como resultado el triple de su edad. ¿Qué edad tiene mi hija?

A) 15 años B) 20 años C) 22 años
D) 18 años E) 21 años

24. Mi hermano mayor nació 8 años antes que yo. Si dentro de 10 años nuestras edades sumarán 82 años, ¿cuál es la edad de mi hermano mayor?

A) 15 años B) 20 años C) 32 años
D) 18 años E) 35 años

25. La edad de Miluska es actualmente el quíntuple de la edad de su hijo. Si dentro de 5 años su edad será el triple de la edad que tendrá su hijo en ese tiempo. ¿Qué edad tenía Miluska cuando nació su hijo?



A) 15 años B) 25 años C) 35 años
D) 20 años E) 30 años

26. La suma de nuestras edades es 48 años. Dentro de 10 años la diferencia de nuestras edades será 16 años. ¿Cuál es la edad del mayor?

A) 28 años B) 40 años C) 30 años
D) 35 años E) 32 años

27. María le dice a Teresa: "Mi edad es 30 años y es el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes actualmente". ¿Cuál es la edad de Teresa?



A) 22 años B) 25 años
C) 40 años D) 20 años
E) 18 años

28. Hace 15 años la edad de un abuelo era 15 veces la edad de su nieto. Actualmente la edad del nieto equivale a los 3/10 de la edad de su abuelo. ¿Cuál es la edad del nieto?

A) 20 años B) 18 años
C) 17 años D) 16 años
E) 15 años

29. Actualmente la edad de un hijo equivale a los 3/7 de la edad del padre. Hace 12 años la edad del padre era el quíntuple de la edad del hijo. ¿Cuál es la edad actual del padre?

A) 55 años B) 37 años
C) 42 años D) 39 años
E) 35 años

30. Un padre tiene el triple de la edad de su hijo. Si la suma de ambas edades es 60 años, ¿cuál es la edad del padre?



A) 45 años B) 35 años
C) 43 años D) 55 años
E) 39 años

Claves

NIVEL 1	9. A	17. C	25. D
1. D	10. D	18. A	26. E
2. E	NIVEL 2	19. B	27. D
3. A	11. E	20. B	28. B
4. E	12. D	NIVEL 3	29. C
5. B	13. A	21. D	30. A
6. D	14. C	22. D	
7. C	15. B	23. E	
8. E	16. D	24. E	

Cuatro operaciones

DEFINICIÓN

Se denomina así a aquellos problemas para cuya resolución se requiere el conocimiento de las operaciones básicas. Estos problemas se dividen así:

a) Método del cangrejo
b) Método del rombo
c) Regla de la conjunta
d) Método del rectángulo

Método del cangrejo

En este tipo de problemas se tiene un resultado final que es el producto de aplicarle operaciones sucesivas al primer número o cantidad inicial.

Como el resultado final es el único dato numérico el procedimiento consiste en aplicar la operación inversa a la indicada en el problema.

Ejemplo 1:

Paolín piensa un número y lo triplica, al resultado le agrega 10 y a lo que obtiene le extrae la raíz cúbica que es igual a 4. ¿Cuál fue el número?

Resolución:

Operaciones sucesivas	Operaciones inversas
Incógnita: 18	
$\times 3$	$\div 3 = 18$
$+10$	$-10 = 54$
$\sqrt[3]{\ }$	$(\ )^3 = 64$
Dato: 4	

∴ El número es 18.

Ejemplo 2:

Nachito multiplica su edad por 6, al producto le resta 2 y a la diferencia la divide entre 5, al cociente le agrega 35 y al resultado le extrae la raíz cuadrada obteniendo 7. ¿Cuántos años tiene Nachito?

Resolución:

Operaciones sucesivas	Operaciones inversas
Incógnita: 12	
$\times 6$	$\div 6 = 12$
-2	$+2 = 72$
$\div 5$	$\times 5 = 70$
$+35$	$-35 = 14$
$\sqrt{\ }$	$(\ )^2 = 49$
Dato: 7	

∴ Nachito tiene 12 años.

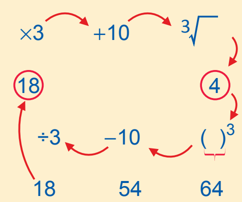
Recuerda

Operación	Inversa
$+$	$-$
$-$	$+$
$\times$	$\div$
$\div$	$\times$



Observación

Al aplicar el método del cangrejo, también se puede emplear un esquema horizontal.



∴ El número inicial es 18.

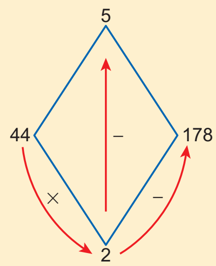


Nota

Se puede observar que el método del cangrejo consiste en resolver mentalmente la ecuación o resolverla por escrito planteando y efectuando las operaciones inversas.

Observación

El n.° de monedas de S/.5 es:

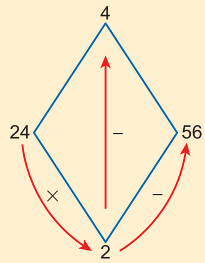


n.° de monedas de S/.5 = $\dfrac{44 \times 2 - 178}{2 - 5} = 30$



Observación

El n.° de perros se calcula así:



n.° de perros $= \dfrac{24 \times 2 - 56}{2 - 4} = 4$

Método del rombo

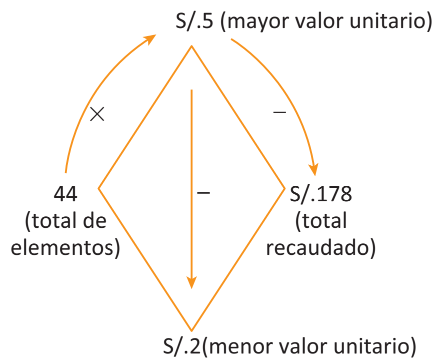
Este tipo de problemas debe tener las siguientes características:

- Dos incógnitas.
- Un valor numérico resultado de la suma de dos incógnitas.
- Valor unitario de las incógnitas.
- Un valor numérico resultado del número total de elementos.

Ejemplo 1:

Entre 44 monedas tengo S/.178, algunas monedas son de S/.5 y otras de S/.2. ¿Cuántas monedas son de S/.2?

Resolución:



n.° de monedas de S/.2 = $\dfrac{44 \times 5 - 178}{5 - 2} = \dfrac{42}{3} = 14$

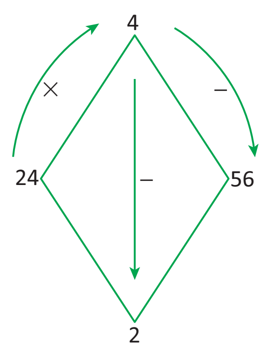
$\therefore$ Hay 14 monedas de S/.2.

Ejemplo 2:

En una veterinaria entre perros y pollos, se cuenta 24 cabezas y 56 patas. ¿Cuántos pollos hay?

Resolución:

Se debe tener presente que los perros tienen 4 patas y los pollos 2:



n.° de pollos = $\dfrac{24 \times 4 - 56}{4 - 2} = \dfrac{40}{2} = 20$

$\therefore$ Hay 20 pollos.

Regla de la conjunta

Los problemas de regla de la conjunta se caracterizan por formar equivalencias entre una cantidad y otra, esta con una tercera y así sucesivamente. Las equivalencias se escriben de tal manera que el segundo miembro de cada equivalencia sea de la misma especie que el primer miembro de la equivalencia siguiente.

Luego se multiplican los primeros miembros de las equivalencias, que debe ser igual a la de los segundos miembros, se cancelan las unidades iguales y se despeja la incógnita.



Atención

La regla de la conjunta tiene por objeto reducir una cantidad a otra de diferente especie, por medio de equivalencias que relacionen la primera con la segunda, la segunda con la tercera y así sucesivamente.

Ejemplo 1:
3 LCD cuestan lo mismo que 2 refrigeradoras; 5 refrigeradoras cuestan lo mismo que 7 microondas; 4 microondas cuestan S/.1200. ¿Cuánto cuesta 1 LCD?

Resolución:

3 LCD <> 2 refrigeradoras
5 refrigeradoras <> 7 microondas
4 microondas <> S/.1200
x <> 1 LCD

---

3 LCD . 5 refrigeradoras . 4 microondas . x <> 2 refrigeradoras . 7 microondas. S/.1200 . 1 LCD
3 . 5 . 4 . x <> 2 . 7 . S/.1200 . 1
x <> S/.280

∴ 1 LCD cuesta S/.280.

Nota

La llamamos regla de la conjunta porque reúne en una sola operación varias relaciones dadas, lo que da lugar a una relación compuesta.

Ejemplo 2:
En un circo 3 enanos ganan lo mismo que 5 payasos, 7 payasos ganan lo mismo que 4 contorsionistas, 6 contorsionistas ganan S/.5040. ¿Cuánto gana 1 enano?

Resolución:

3 enanos <> 5 payasos
7 payasos <> 4 contorsionistas
6 contorsionistas <> S/.5040
x <> 1 enano

---

3 enanos . 7 payasos . 6 contorsionistas . x <> 5 payasos . 4 contorsionistas . S/.5040 . 1 enano
3 . 7 . 6 . x <> 5 . 4 . S/.5040 . 1
x <> S/.800

∴ 1 enano gana S/.800.



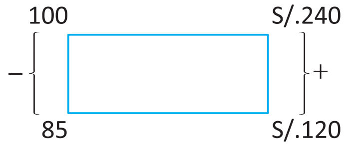
Observación

En los problemas sobre regla de la conjunta al formar las equivalencias, se debe procurar que en cada columna no se repitan los elementos, si se repiten se debe cambiar el sentido de las equivalencias.

Método del rectángulo

Ejemplo:
Un comerciante desea comprar 100 libros de matemáticas, pero le falta S/.240; pero si compra 85 libros le sobra S/.120. ¿Cuánto cuesta cada libro?

Resolución:



$$\text{Costo de cada libro} = \frac{240 + 120}{100 - 85} = \frac{360}{15} = 24$$

∴ Cada libro cuesta S/.24.

Nota

En los problemas sobre método del rectángulo se procede de la siguiente manera:
La cantidad sobrante (ganancia) y la cantidad faltante (pérdida) se suman, las otras cantidades se restan y estos resultados se dividen.

Problemas resueltos

1 Un tanque se vacía en 3 horas y cada hora vacía la mitad más 2 litros de lo que había en la hora anterior, ¿cuántos litros contenía el tanque?

Resolución:

Aplicamos el método del cangrejo:

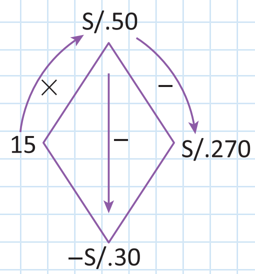
1.ª hora	$\div 2$	$\times 2 = 28$
	-2	$+2 = 14$
2.ª hora	$\div 2$	$\times 2 = 12$
	-2	$+2 = 6$
3.ª hora	$\div 2$	$\times 2 = 4$
	-2	$(0) + 2 = 2$

$\therefore$ El tanque contenia 28 litros.

2 Un padre desea motivar a su hijo y le propone darle S/.50 por examen aprobado y que él tendrá que devolver S/.30 por cada examen desaprobado. Después de 15 exámenes el hijo tiene S/.270. ¿Cuántos exámenes desaprobó?

Resolución:

Aplicamos el método del rombo:

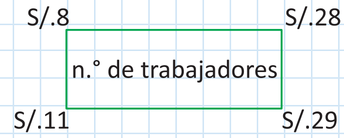


$$\text{n.° de exámenes desaprobados} = \frac{15 \times 50 - 270}{50 - (-30)} = \frac{480}{80} = 6$$

3 Los alumnos de un colegio deciden comprar un regalo a su profesor. Si cada uno aporta S/.8 faltaría S/.28, y si cada uno aporta S/.11 sobraría S/.29. ¿Cuántos trabajadores son y cuánto cuesta el regalo?

Resolución:

Aplicamos el método del rectángulo:



$$\text{n.° de trabajadores} = \frac{28 + 29}{11 - 8} = \frac{57}{3} = 19$$

Regalo $= 8 \times 19 + 28 = 180$

4 Una sastrería cobra lo mismo por hacer 3 sacos o 5 pantalones, 4 pantalones o 6 camisas; si por 7 camisas cobra S/.91, ¿cuánto cobra por hacer 1 saco?

Resolución:

Aplicamos regla de la conjunta:

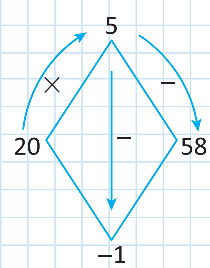
3 sacos <> 5 pantalones
4 pantalones <> 6 camisas
7 camisas <> S/.91
x <> 1 saco

3 . 4 . 7 . x <> 5 . 6 . S/.91 . 1
2x <> S/.65
x <> S/.32,5

5 Un examen de razonamiento matemático consta de 20 preguntas. La calificación es de 5 puntos por cada respuesta correcta y –1 por cada respuesta errónea. Un alumno respondió todas las preguntas y obtuvo 58 puntos. ¿En cuántas preguntas se equivocó?

Resolución:

Aplicamos el método del rombo:

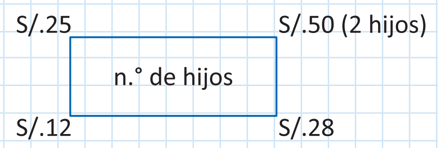


$$\text{n.° de preguntas equivocadas} = \frac{20 \times 5 - 58}{5 - (-1)} = \frac{42}{6} = 7$$

6 Un padre va con sus hijos al teatro y piensa: "Si compro entradas de S/.25 me falta para 2 hijos y si compro entradas de S/.12 me sobra S/.28. ¿Cuántos hijos son y cuánto dinero tiene el padre?

Resolución:

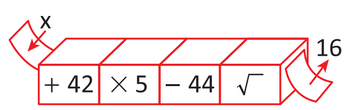
Aplicamos el método del rectángulo:



$$\text{n.° de hijos} = \frac{50+28}{25-12} = \frac{78}{13} = 6$$

$$\text{Dinero} = 25 \times 6 - 50 = \text{S/.}100$$

7 La máquina de la figura realiza operaciones en forma sucesiva. Si arroja como resultado 16, ¿cuánto vale x?



Resolución:

Aplicamos el método del cangrejo:

+42	$-42 = 18$ → x
×5	$\div 5 = 60$
−44	$+44 = 300$
$\sqrt{\ }$	$16^2 = 256$
Dato: 16	

$\therefore x = 18$

8 En una ferretería 5 bolsas de cemento cuestan lo mismo que 7 fierros de media, también 4 fierros de media cuestan lo mismo que 260 ladrillos. Si el millar de ladrillos cuesta S/.200, ¿cuánto cuesta 1 bolsa de cemento?

Resolución:

5 bolsas de cemento <> 7 fierros de media
4 fierros de media <> 260 ladrillos
1000 ladrillos <> S/.200
x <> 1 bolsa de cemento

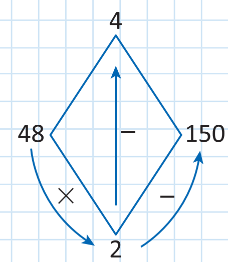
5 . 4 . 1000 . x <> 7 . 260 . S/.200 . 1
5x <> S/.91
x <> S/.18,2

∴ 1 bolsa de cemento cuesta S/.18,2.

9 Un cilindro contiene 150 litros de agua. Se desea distribuirlos en 48 baldes, algunos de 4 litros y otros de 2 litros. ¿Cuántos baldes de 4 litros se van a utilizar?

Resolución:

Aplicamos el método del rombo:



$$\text{n.° de baldes de 4 L} = \frac{48 \times 2 - 150}{2-4} = \frac{-54}{-2} = 27$$

∴ Se van a utilizar 27 baldes de 4 L.

10 Con 2 motos obtenemos 15 bicicletas, con 7 patines obtenemos 16 pelotas, con 49 patines obtenemos 5 bicicletas; con 6 motos, ¿cuantas pelotas se obtendrán?

Resolución:

2 motos <> 15 bicicletas
7 patines <> 16 pelotas
5 bicicletas <> 49 patines
x pelotas <> 6 motos

2 . 7 . 5 . x <> 15 . 16 . 49 . 6
x <> 1008

∴ Con 6 motos se obtendrán 1008 pelotas.

Actividades de razonamiento

1. En un corral, en el cual solo hay patos y conejos, se cuentan 38 animales y 116 patas. ¿Cuántos conejos hay?

A) 18 B) 20 C) 25
D) 15 E) 18

2. En una cartera hay 40 monedas, unas de S/.5 y otras de S/.2. Si en total hay S/.164 en la bolsa, ¿cuántas monedas son de S/.5?

A) 30 B) 12 C) 16
D) 24 E) 28

3. En una función de teatro las entradas cuestan S/.10 para adultos y S/.6 para los niños. Cierto día asistieron 196 personas y se recaudó S/.1856. ¿Cuántos niños asistieron a la función?

A) 26 B) 28 C) 42
D) 29 E) 35

4. El número de polos que tengo lo multiplico por 6, al producto obtenido lo divido por 10, a este resultado lo elevo al cuadrado, a este nuevo resultado le agrego 16 y después a esta suma se le extrae la raíz cuadrada, obteniendo como resultado final 5. ¿Cuántos polos tengo?

A) 10 B) 7 C) 8
D) 5 E) 12

5. Un número se multiplica por 5, luego a este resultado se le suma 16; a la suma se le extrae la raíz cuadrada y a este resultado lo dividimos por 3. Si al cociente le sumamos 7, para luego elevar al cuadrado la suma, obtenemos como respuesta 100. Halla la suma de cifras de dicho número.

A) 10 B) 5 C) 4
D) 8 E) 3

6. Un depósito está lleno con agua. Si se extraen 2 litros, luego se extrae la mitad del contenido, a continuación se adicionan 4 litros y finalmente se extrae la mitad, quedan 8 litros. ¿Cuántos litros había inicialmente?

A) 24 B) 30 C) 28
D) 32 E) 26

7. En una feria agropecuaria 7 gallinas cuestan lo mismo que 2 pavos, 14 patos cuestan lo mismo que 5 pavos, 3 conejos cuestan lo mismo que 8 patos. ¿Cuánto costarán 4 gallinas si un conejo vale 30 soles?

A) 42 soles B) 36 soles C) 40 soles
D) 38 soles E) 30 soles

8. Sabiendo que 2 kilos de frijoles cuestan lo mismo que 3 kilos de azúcar, que 4 lápices valen lo mismo que 5 kilos de azúcar, que 3 cuadernos valen 30 soles y que 8 lápices cuestan lo mismo que 4 cuadernos. ¿Cuánto costarán 6 kilos de frijoles?

A) 36 soles B) 40 soles C) 25 soles
D) 45 soles E) 32 soles

9. El trabajo de cuántos hombres equivaldrá al trabajo de 8 niños, si el trabajo de 4 niños equivale al de 3 niñas, el de una mujer al de 2 niñas y el de 3 mujeres al de un hombre.

A) 6 B) 1 C) 3
D) 2 E) 4

10. Un distribuidor de bebidas gasificadas pensaba así: "Si vendo las cajas de gaseosa que tengo a S/.18 cada una, perdería S/.28, pero si vendo cada una a S/.22, ganaría S/.72. ¿Cuántas cajas de gaseosa tiene el distribuidor?

A) 30 B) 25 C) 28
D) 32 E) 20

11. Un profesor tiene una bolsa de caramelos. Si a cada alumno le da 6 caramelos, le sobra 18, pero si a cada uno le da 8, le faltaría 12 caramelos. ¿Cuántos alumnos tiene?

A) 7 B) 8 C) 15
D) 13 E) 12

12. Si compro 30 lapiceros me faltaría S/.24, pero si compro 24 lapiceros me sobraría S/.12. ¿Cuánto cuesta cada lapicero?

A) S/.6 B) S/.8 C) S/.9
D) S/.4 E) S/.10

13. El Metropolitano realiza el servicio Lima-Comas cobrando 7 soles por cada adulto y 4 soles por cada niño. Si en uno de sus viajes recaudó 148 soles y transportó 25 pasajeros. ¿Cuántos adultos hicieron uso del servicio?

A) 13 B) 20 C) 18
D) 16 E) 12

14. En un pueblo existe un santo que hace el milagro de duplicar el dinero que uno tiene, pero por cada milagro que hace se le debe dejar una limosna de 16 soles. Si luego de hacerle 3 milagros a un devoto este salió de la iglesia sin un centavo. ¿Cuánto tenía al entrar?

A) 20 B) 18 C) 14
D) 13 E) 16

Claves

1. B	5. C	9. B	13. D
2. E	6. E	10. B	14. C
3. A	7. B	11. C	
4. D	8. A	12. A	

Reto



Tres personas A; B y C, juegan a los dados con la condición que el perdedor de cada partida duplicaría el dinero de los otros dos. Perdieron en ese orden y quedaron al final con 32 soles cada uno. ¿Cuánto tenía A, inicialmente?

Rpta.: 52

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Hace algunos años, el cambio monetario era el siguiente:
   8 soles <> 6 cruzados
   10 cruzados <> 4 pesos
   2 pesos <> 5 dólares
   ¿Cuántos soles daban por 3 dólares?

   A) S/.1 B) S/.2 C) S/.5
   D) S/.4 E) S/.3

2. Con un cierto número Angie hizo las siguientes operaciones: primero le sumó 3, al resultado lo multiplicó por 7, enseguida al resultado anterior le extrajo la raíz cuadrada, por último lo dividió entre 2, obtuvo así 7 como resultado final. Halla dicho número.

   A) 20 B) 25 C) 40
   D) 35 E) 30

3. En una granja donde hay vacas y gallinas, se contaron 90 cabezas y 252 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

   A) 36 B) 46 C) 54
   D) 58 E) 50

4. Si doy 5 naranjas a cada uno de mis sobrinos sobran 6 naranjas; pero si doy 2 más a cada uno, faltan 8 naranjas. ¿Cuántos sobrinos tengo?

   A) 7 B) 10 C) 12
   D) 8 E) 11

5. En una feria agropecuaria, 5 conejos equivalen a 2 corderos, 3 corderos valen tanto como 10 pollos y 7 pollos valen S/.21 ¿Cuánto cuestan 9 conejos?

   A) S/.25 B) S/.40 C) S/.45
   D) S/.30 E) S/.36

6. A la edad de Juan le agregamos 4, luego extraemos la raíz cuadrada, multiplicamos por 2 este resultado, luego extraemos raíz cúbica, le sumamos 16, la dividimos por 6 y obtenemos 3. ¿Cuál es la edad de Juan?

   A) 15 B) 13 C) 11 D) 12 E) 8

7. En una bolsa hay 24 monedas, unas son de S/.2 y otra de S/.5. Si en total hay S/.93, ¿cuántas monedas de S/.5 hay?

   A) 16 B) 15 C) 13 D) 11 E) 9

8. Para realizar un viaje, el dueño de un bus pensó cobrar S/.9 a cada pasajero, pero se da cuenta que así perdería S/.4, entonces decide cobrar a cada pasajero S/.15, ganando ahora S/.320. ¿Cuál es el costo operativo del bus para dicho viaje?

   A) S/.430 B) S/.380 C) S/.580
   D) S/.520 E) S/.490

9. Se tiene 36 kg de arroz de dos calidades diferentes. Una de las calidades de arroz tiene el precio de S/.2 el kilogramo y la otra S/.3 el kilogramo. Si en total se gastó S/.94, ¿cuántos kilogramos de arroz del mayor precio se compraron?

   A) 22 B) 15 C) 14 D) 16 E) 18

10. Si a un número lo multiplicamos por 5, luego le restamos 4, al resultado le extraemos raíz cuadrada, para luego sumarle 14 al resultado. Finalmente dividimos por 4 el resultado y obtenemos 5. ¿Cuál era el número inicial?

A) 5 B) 8 C) 11 D) 13 E) 12

NIVEL 2

11. En un restaurante, 2 platos de lomo saltado cuestan tanto como 3 platos de arroz con pollo y 7 platos de arroz con pollo cuestan S/.42. ¿Cuánto costarán 5 platos de lomo saltado?

A) S/.45 B) S/.50 C) S/.37
D) S/.30 E) S/.35

12. Antonio tiene cierta suma de dinero; si la divide por 6, después al resultado le suma 5, a la suma le multiplica por 4 y al producto le extrae la raíz cuadrada, obtiene como resultado 6. ¿Cuánto tiene Antonio?

A) S/.40 B) S/.30 C) S/.24
D) S/.28 E) S/.36

13. A una función de teatro asistieron 180 personas entre adultos y niños. Los adultos pagan S/.10 y los niños S/.3. Si en total se recaudó S/.1548, ¿cuántos niños asistieron?

A) 38 B) 40 C) 44 D) 36 E) 30

14. Se paga una deuda de S/.650 con 25 billetes, entre billetes de S/.10 y S/.50. ¿Cuántos billetes de S/.10 se ha empleado?

A) 15 B) 10 C) 12
D) 17 E) 13

15. Un grupo de amigos al juntar sus propinas para ir al cine se dan cuenta que si compran entradas de S/.12 faltará S/.25, mientras que si compran entradas de S/.9, les sobrará S/.2. ¿Cuántos amigos fueron al cine?

A) 8 B) 10 C) 12
D) 9 E) 6

16. En la joyería Selene, 2 aretes cuestan lo mismo que 3 sortijas, 2 sortijas lo mismo que 5 cadenas y 15 cadenas lo mismo que 8 medallas. ¿Cuántas medallas obtendrá por 3 aretes?



A) 14 B) 8 C) 6
D) 12 E) 10

17. Sabiendo que 3 lapiceros cuestan lo mismo que 5 lápices, 5 lápices cuestan lo mismo que 9 reglas y 2 reglas cuestan 3 soles, ¿cuánto cuestan 4 lapiceros?

A) S/.10 B) S/.18 C) S/.20
D) S/.12 E) S/.15



18. El dueño de un gimnasio pensó cobrar a cada uno de sus clientes S/.45; pero le faltaría S/.56 para cubrir sus gastos, entonces decide cobrar S/.60 a cada uno y ahora le sobra S/.1219. ¿Cuántos clientes tiene dicho gimnasio?

A) 80 B) 70 C) 56
D) 76 E) 85

19. En el mercado, 8 kilogramos de cebolla cuestan tanto como 12 kilogramos de zapallo, 5 kilogramos de zapallo cuestan S/.3. ¿Cuánto costará 10 kilogramos de cebolla?

A) S/.9 B) S/.7 C) S/.5
D) S/.6 E) S/.8

20. Un comerciante ha gastado S/.502 en la compra de 25 prendas de vestir, entre camisas y pantalones, a S/.18 y S/.22 cada uno, respectivamente. ¿Cuántos pantalones se han comprado?

A) 12 B) 11 C) 14
D) 13 E) 15

NIVEL 3

21. En el mercado de plantas Rodolfo razonaba de la siguiente manera: "Si el día de hoy vendo 35 plantas, ganaré S/.22, en cambio, si solo vendo 25 plantas, perderé S/.18". Si todas las plantas cuestan igual, ¿cuál es el precio de venta de cada planta?

A) S/.5 B) S/.4 C) S/.3
D) S/.2 E) S/.1

22. En un examen de 50 preguntas, cada respuesta correcta se califica con 4 puntos a favor y cada respuesta incorrecta se califica con un punto en contra. Un alumno contestó todas las preguntas y obtuvo 125 puntos, ¿cuántas preguntas contestó correctamente?

A) 48 B) 32 C) 35
D) 42 E) 40

23. En una librería, 2 cuadernos valen tanto como 15 reglas, 6 reglas valen tanto como 18 borradores. Si cada borrador vale S/.1, ¿cuánto cuestan 8 cuadernos?

A) S/.180 B) S/.200 C) S/.220
D) S/.300 E) S/.160

24. Una señora cobra por lavar un pantalón S/.4 y por una casaca S/.7. Si ha lavado 15 prendas entre pantalones y casacas, logrando cobrar S/.69 por todo el lavado, ¿cuántos pantalones lavó?

A) 10 B) 15 C) 13
D) 16 E) 12

25. Un encuestador pensó visitar 12 casas, pero visitó 3 casas más por estar 2 horas menos en cada casa. ¿Cuántas horas de trabajo le dedicó a cada casa visitada?

A) 10 h B) 8 h C) 11 h
D) 9 h E) 12 h

26. Un joven en un concurso donde le hacen 20 preguntas, ha ganado S/.16. Si por cada respuesta correcta recibe S/.5 y por cada incorrecta debe entregar de sus ganancias S/.2, ¿cuántas respuestas correctas llegó a contestar?

A) 11 B) 9 C) 12
D) 10 E) 8

27. En una tienda comercial 2 lavadoras cuestan tanto como 5 DVD, 9 DVD cuestan tanto como 4 TV; 5 TV tanto como 3 equipos de sonido y 2 equipos de sonido tanto como 1200 dólares. ¿Cuál es el costo de una lavadora?

A) 250 dólares B) 200 dólares
C) 500 dólares D) 400 dólares
E) 300 dólares

28. Un albañil pensó construir un muro en 4 días, pero demoró dos días más por trabajar 4 horas menos cada día. ¿Cuántas horas se requiere para que construya el muro?

A) 48 h B) 40 h C) 29 h
D) 96 h E) 36 h

29. Sebastián cría conejos en la azotea de su casa. Él ha observado que si coloca tres conejos en cada conejera, le sobra un conejo; pero si coloca cinco conejos en cada conejera, le sobran tres conejeras. ¿Cuántas conejeras tiene Sebastián?

UNMSM 2008-II

A) 6 B) 8 C) 4
D) 7 E) 2

30. Un ganadero tiene cierta cantidad de reses para vender. El primer cliente le compra la mitad de las que tiene, más media res; el segundo le compra la mitad de las que le queda, más media res; el tercero le compra la mitad de la que aún le queda, más media res. Si todavía le queda una res, ¿cuántas reses tenía inicialmente si todas se vendieron vivas?



A) 63 B) 31 C) 15 D) 7 E) 5

Claves

NIVEL 1
1. D
2. B
3. C
4. A
5. E
6. D
7. B
8. E
9. A
10. B

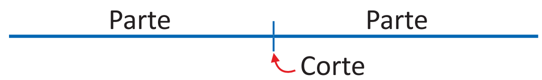
NIVEL 2
11. A
12. C
13. D
14. A
15. D
16. C
17. B
18. E
19. A
20. D

NIVEL 3
21. B
22. C
23. A
24. E
25. A
26. E
27. D
28. A
29. B
30. C

Cortes, estacas y pastillas

NÚMERO DE CORTES

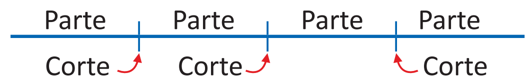
Vamos a dividir un alambre de fierro en varias partes realizando uno o más cortes como se observa en las siguientes figuras:



1 corte ⇒ 2 partes



2 cortes ⇒ 3 partes



3 cortes ⇒ 4 partes

Se observa que:

$$\text{Número de cortes} = \text{Número de partes} - 1$$

También:

$$\text{Número de partes} = \frac{\text{Longitud del alambre}}{\text{Longitud de cada parte}}$$

Luego:

$$\text{Número de cortes} = \frac{\text{Longitud del alambre}}{\text{Longitud de cada parte}} - 1$$

Atención

Veamos una aplicación:
A un listón de madera de 120 m de longitud se le hacen cortes para obtener pedazos de 5 m. ¿Cuántos cortes se realizarán?

Aplicamos la fórmula:

$$\text{n.° de cortes} = \frac{\text{Long. total}}{\text{Long. de cada parte}} - 1$$

Luego:

$$\text{n.° de cortes} = \frac{120}{5} - 1 = 23$$

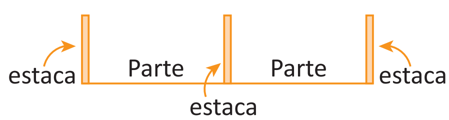


NÚMERO DE ESTACAS

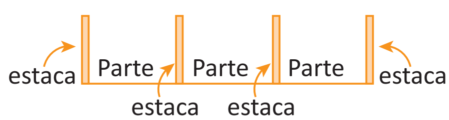
Vamos a colocar estacas igualmente separadas a lo largo de una cerca, como se observa en las figuras.



2 estacas ⇒ 1 parte



3 estacas ⇒ 2 partes



4 estacas ⇒ 3 partes

Atención

Veamos una aplicación:
En una avenida de 500 m de longitud se colocan postes cada 25 m. ¿Cuántos postes se colocarán desde el inicio de la avenida?

Aplicamos la fórmula:

$$\text{n.° de postes} = \frac{\text{Long. total}}{\text{Distancia entre dos postes}} + 1$$

Luego:

$$\text{n.° de postes} = \frac{500}{25} + 1 = 21$$

Se observa que:

Número de estacas = Número de partes + 1

También:

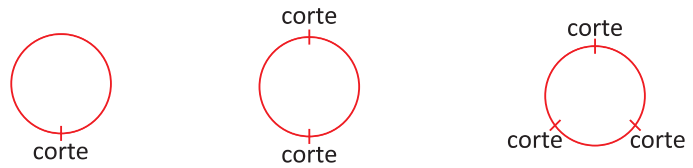
$$\text{Número de partes} = \frac{\text{Longitud de la cerca}}{\text{Separación entre dos estacas}}$$

Luego:

$$\text{Número de estacas} = \frac{\text{Longitud de la cerca}}{\text{Separación entre dos estacas}} + 1$$

NÚMERO DE CORTES Y ESTACAS PARA FIGURAS CERRADAS

Se llama figura cerrada a una circunferencia, un rectángulo, un triángulo, cuadrado, pentágono u otro polígono.



1 corte 1 parte	2 cortes 2 partes	3 cortes 3 partes

Se observa que:

Número de cortes = Número de partes

Luego:

$$\text{Número de cortes} = \frac{\text{Longitud total}}{\text{Longitud de cada parte}}$$

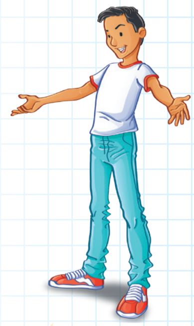
Atención

Veamos un ejemplo:
¿Cuántos cortes se deben hacer a un aro de alambre de 96 m de longitud para obtener pedazos de 6 m de longitud?

Aplicamos la fórmula:

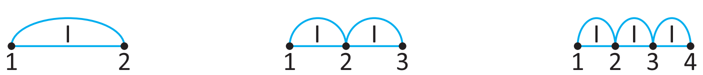
$$\text{n.° de cortes} = \frac{\text{Long. total}}{\text{Long. de cada parte}}$$

$$\text{n.° de cortes} = \frac{96}{6} = 16$$



NÚMERO DE PASTILLAS

Vamos a calcular la cantidad de pastillas que puede tomar un paciente en un período de tiempo.



1 intervalo 2 pastillas	2 intervalos 3 pastillas	3 intervalos 4 pastillas

Se observa que:

Número de pastillas = Número de intervalos + 1

También:

$$\text{n.° de intervalos} = \frac{\text{Tiempo total}}{\text{Intervalo entre pastilla y pastilla}}$$

Luego:

$$\text{Número de pastillas} = \frac{\text{Tiempo total}}{\text{Intervalo entre pastilla y pastilla}} + 1$$

Atención

Veamos un ejemplo:
¿Cuántas pastillas tomará un paciente durante 24 horas, si debe tomar una pastilla cada 3 horas?

Aplicamos la fórmula:

$$\text{n.° de pastillas} = \frac{\text{Tiempo total}}{\text{Intervalo entre pastilla y pastilla}} + 1$$

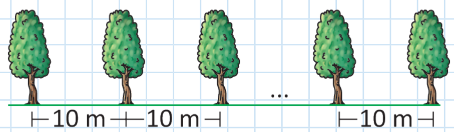
$$\text{n.° de pastillas} = \frac{24}{3} + 1 = 9$$

Problemas resueltos

1 A lo largo de una avenida se plantan 39 árboles desde el inicio, cada 10 m. ¿Cuál es la longitud de la avenida?

Resolución:

Representamos gráficamente:



Asociamos estacas con árboles, entonces aplicamos lo siguiente:

$$\text{n.° de árboles} = \frac{\text{Longitud de la avenida}}{\text{Longitud entre cada árbol}} + 1$$

$$\text{Entonces: } 39 = \frac{\text{Longitud de la avenida}}{10} + 1$$

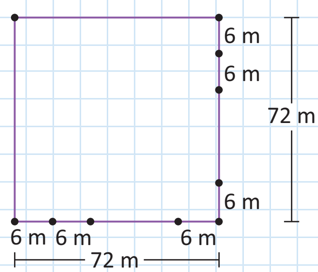
$$38 = \frac{\text{Longitud de la avenida}}{10}$$

$\therefore$ Longitud de la avenida = 380 m

2 Se desea cercar un terreno de forma cuadrada de 72 m de lado. Si las estacas se colocan cada 6 m, ¿cuántas se colocarán?

Resolución:

Gráficamente:



Aplicamos:

$$\text{n.° de estacas} = \frac{\text{Perímetro de la figura}}{\text{Longitud entre cada estaca}}$$

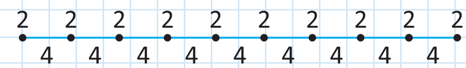
$$\text{Luego: n.° de estacas} = \frac{4(72)}{6}$$

$\therefore$ n.° de estacas = 48

3 Un médico recomienda a su paciente tomar 2 pastillas cada 4 horas. ¿En qué tiempo se acabará una caja de 20 pastillas?

Resolución:

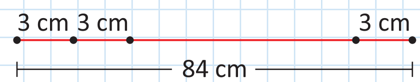
Gráficamente:



Tiempo = $9 \times 4 = 36$ h

4 Se tiene una varilla de fierro de 84 cm de largo, que se desea dividir en trozos de 3 cm cada uno. ¿Cuánto nos cobra el cortador por cada corte, si recibe en total S/.54?

Resolución:



$$\text{n.° de cortes} = \frac{\text{Long. de la varilla}}{\text{Long. de cada trozo}} - 1 = \frac{84}{3} - 1$$

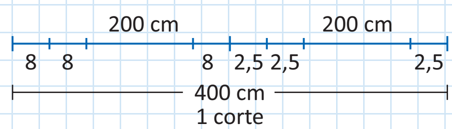
n.° de cortes = 27

$$\text{Luego: } \text{Costo de cada corte} = \frac{\text{Costo total}}{\text{n.° de cortes}} = \frac{\text{S/.54}}{27} = \text{S/.2}$$

5 Se corta un alambre de 400 cm en dos partes de igual longitud, luego en cada parte se realizan nuevos cortes y se obtiene un número exacto de pedazos; en el primer corte, pedazos de 8 cm, y en el segundo, pedazos de 2,5 cm. Halla el número total de cortes que se realizaron.

Resolución:

Gráficamos:



Calculamos el número de cortes de cada parte:

1.ª parte: $\text{n.° de cortes} = \frac{200}{8} - 1 = 24$

2.ª parte: $\text{n.° de cortes} = \frac{200}{2,5} - 1 = 79$

$\therefore$ n.° total de cortes = $1 + 24 + 79 = 104$

6 A Manolo se le suministra 40 pastillas durante 13 días cada cierto número de horas, ¿cada cuántas horas se le dio la pastilla?

Resolución:

Aplicamos:

$$\text{n.° de pastillas} = \frac{\text{Tiempo total}}{\text{Duración de cada turno}} + 1$$

$$40 = \frac{24(13)}{\text{Duración de cada turno}} + 1$$

$$39 = \frac{24(13)}{\text{Duración de cada turno}}$$

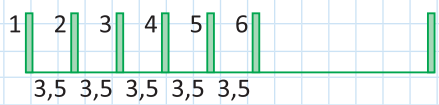
Duración de cada turno = 8 horas

∴ Cada 8 horas se le dio la pastilla.

7 En la construcción de una cerca, las estacas son colocadas cada 3,5 m. La distancia en metros desde la primera estaca hasta la sexta estaca, es:

Resolución:

Veamos gráficamente:



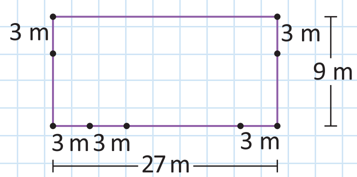
Se puede observar que la distancia de la primera estaca a la sexta estaca es:

$$3{,}5(5) = 17{,}5 \text{ m}$$

8 Un terreno rectangular mide 27 m de largo por 9 m de ancho. Cada 3 m se coloca una estaca. El número de estacas que se deben colocar es:

Resolución:

Realizamos un gráfico:



Aplicamos la fórmula de estacas:

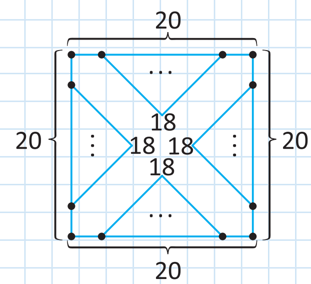
$$\text{n.° de estacas} = \frac{\text{Perímetro de la figura}}{\text{Distancia entre cada estaca}}$$

$$\text{n.° de estacas} = \frac{2(27+9)}{3} = \frac{2 \times 36}{3} = 24$$

9 Se forma un cuadrado con personas, colocando 20 personas en cada lado. Si en cada vértice hay una persona, ¿cuántas personas hay en total?

Resolución:

Veamos gráficamente:

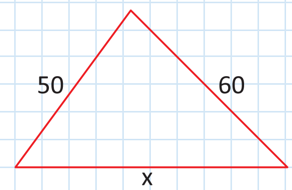


n.° total de personas = 18(4) + 4 = 76

10 Una finca tiene la forma de un triángulo, donde 2 de sus lados miden 50 m y 60 m, y el otro mide el doble de uno de los lados. ¿Cuántas estacas se deben poner si se desea que estén separadas 2 m entre sí, y puedan cercar la propiedad?

Resolución:

Gráficamente se tiene:



Sabemos que: $60 - 50 < x < 60 + 50$

$10 < x < 110$

Por dato: $x = 2(50) \vee x = 2(60)$

$x = 100 \vee x = 120$

Luego:

$$\text{n.° de estacas} = \frac{\text{Perímetro de la figura}}{\text{Distancia entre cada estaca}}$$

$$= \frac{50 + 60 + 100}{2}$$

$$= \frac{210}{2} = 105$$

Actividades de razonamiento

1. A un fierro de construcción de 6 m de longitud se le corta en pedazos de 12 cm. ¿Cuántos cortes se han realizado?

A) 50 B) 51 C) 47
D) 48 E) 49

2. Un alambre de cobre se ha cortado en pedazos de 7 m de longitud y para esto se hicieron 32 cortes. ¿Cuál fue la longitud del alambre de cobre?

A) 231 B) 235 C) 230
D) 233 E) 241

3. ¿Cuántos cortes se deben hacer a un aro de 252 cm de longitud, para obtener pedazos de 28 cm de longitud?

A) 7 B) 8 C) 10
D) 9 E) 11

4. ¿Cuántas estacas se necesitan para cercar un terreno de forma cuadrada de 56 m de lado, si las estacas se colocan cada 8 m?

A) 25 B) 28 C) 26
D) 31 E) 30

5. A una regla de madera de 2,8 m de longitud se le aplican 19 cortes, obteniendo reglitas de "x" cm de longitud. Halla el valor de "x".

A) 15 B) 18 C) 14
D) 16 E) 12

6. Se instalan 46 postes alineados y separados entre sí por una distancia de 24 m, uno del otro. ¿Cuál es la distancia entre el primer y último poste?

A) 1800 m B) 1400 m C) 1080 m
D) 1440 m E) 1512 m

7. Se ha formado un cuadrado con personas, donde en un lado hay 5 personas, en el segundo hay 7 personas, en el tercer lado hay 9 personas y en el cuarto lado hay 6 personas. ¿Cuántas personas hay en total, si en cada vértice hay una persona?

A) 21 B) 24 C) 20
D) 25 E) 23

8. Un terreno tiene la forma de un triángulo equilátero, cuyo perímetro es 90 m. Se desea colocar estacas cada 5 m. Si en cada vértice va una estaca, ¿cuántas estacas hay en cada lado?

A) 5 B) 7 C) 6
D) 8 E) 9

9. Se tiene una barra de oro de 96 cm de largo, que se debe dividir en trozos de 4 cm cada uno. Si por cada corte cobran S/.5, ¿cuánto se paga en total?

A) S/.105 B) S/.95 C) S/.115
D) S/.108 E) S/.112

10. Se cerca un terreno rectangular colocando 3 estacas cada 8 m. ¿Cuántas se colocarán, si el terreno mide 80 m de largo y 40 m de ancho?

A) 60 B) 80 C) 100
D) 90 E) 96

11. Un cerrajero cobra S/.0,50 por hacer un corte en una varilla de fierro de construcción. Si gana S/.24, ¿cuántas varillas había si cada varilla mide 8 m y cada trozo cortado 2 m?

A) 16 B) 18 C) 20
D) 24 E) 21

12. Un carpintero ha efectuado 8 cortes a una regla de madera de 4,5 m. Para hacer cada corte, el carpintero se demoró 4 minutos. ¿Cuál es la longitud de cada pieza de madera y el tiempo que demora?

A) 0,5 m y 36 min B) 0,4 m y 32 min
C) 0,5 m y 32 min D) 0,4 m y 36 min
E) 0,5 m y 28 min

13. Un médico suministró a un paciente 16 pastillas durante 5 días cada cierto número de horas. ¿Cada cuántas horas debe tomar el paciente cada pastilla?

A) 7 B) 9 C) 8
D) 5 E) 6

14. El doctor le indicó a Joaquín que tomara 3 pastillas cada 6 horas durante 4 días. ¿Cuánto habrá gastado Joaquín, si cada pastilla, cuesta S/.3?

A) S/.95 B) S/.135 C) S/.105
D) S/.115 E) S/.125

Claves

1. E	5. C	9. C	13. C
2. A	6. C	10. D	14. B
3. D	7. E	11. A	
4. B	8. B	12. C	

Reto



Un hojalatero para cortar una cinta metálica de $(k^2 - 1)$ metros de largo cobra $(k + 1)$ soles por cada corte que hace. Si cada corte lo hace cada $(k - 1)$ metros, ¿cuánto cobrará por toda la cinta?

Rpta.: S/.$k(k + 1)$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Una larga soga debe dividirse en trozos de 27 m de largo cada uno. Si la soga mide 1215 metros, ¿cuántos cortes debemos hacer?

A) 45　B) 47　C) 45
D) 44　E) 25

2. A lo largo de un pasaje de 138 metros de longitud se desea plantar árboles cada 6 metros. ¿Cuántos árboles se requieren?

A) 25　B) 24　C) 22
D) 18　E) 20

3. Una enfermera le da una pastilla cada 24 minutos a su paciente durante 8 horas. ¿Cuántas pastillas tomará el paciente?



A) 19　B) 22　C) 23
D) 20　E) 21

4. En una de las calles de cierta avenida se observó una cierta cantidad de postes; la calle tiene 100 m, de largo y los postes están separados uno del otro en 2,5 m. Indica la cantidad de postes que hay en dicha calle.

A) 41　B) 42　C) 38
D) 35　E) 40

5. Carolina está en cama por una enfermedad, por lo que el médico le recomendó tomar cada 6 horas una pastilla durante 5 días. ¿Cuántas pastillas tomó si lo hizo desde el inicio del primer día hasta el final del último?

A) 23　B) 22　C) 21
D) 19　E) 20

6. En la parte exterior de una tienda se ha colocado en paralelo, cierta cantidad de bicicletas, separadas 40 cm; una de otra; si la distancia de la primera a la última bicicleta es de 4,8 m, calcula la cantidad de estas.

A) 11　B) 13　C) 12
D) 15　E) 14

7. Se debe colocar una cortina en una ventana amplia, para lo cual la cortina debe tener 9 m de largo. Si los hojalillos deben estar separados 10 cm, uno del otro, ¿cuántos de estos se colocarán?

A) 92　B) 90　C) 92
D) 89　E) 91

8. ¿Cuántas pastillas tomará un enfermo durante 48 horas que estará en cama, si toma una cada 2 horas, desde el comienzo hasta el final?

A) 24　B) 28　C) 29
D) 25　E) 26

9. ¿Cuántos árboles pueden colocarse a lo largo de una avenida que tiene 1,5 km de longitud? Los árboles se colocan cada 15 metros.

A) 101 B) 103 C) 102
D) 99 E) 100

10. A lo largo de un terreno de 600 m de longitud se desea colocar estacas cada 15 m. ¿Cuántas estacas se podrán colocar?

A) 40 B) 41 C) 42
D) 44 E) 43

NIVEL 2

11. ¿Cuántas pastillas tomará un enfermo durante una semana que está en cama, si toma una cada 3 horas y empezó a tomarlas apenas empezó su reposo hasta que culminó?

A) 60 B) 56 C) 58
D) 59 E) 57

12. ¿Cuántas estacas se deben colocar en el borde de un rectángulo de 20 m de largo por 10 m de ancho si entre estaca y estaca debe haber 3 m de distancia?

A) 20 B) 18 C) 21
D) 10 E) 19

13. Alrededor de una mesa circular se ubican sillas cada 2 metros. Si el perímetro de la mesa es de 16 m, ¿cuántas personas se pueden sentar como máximo en la mesa?

A) 7 B) 10 C) 8
D) 11 E) 9

14. Una varilla de fierro ha sido seccionada en pedazos de 24 cm de largo. Si se hicieron 11 cortes, ¿cuál era la longitud de la varilla?

A) 290 cm B) 291 cm C) 289 cm
D) 288 cm E) 287 cm

15. Una regla de madera de 270 cm de longitud ha sido cortada 17 veces, ¿qué longitud tienen las reglitas resultantes?

A) 15 cm B) 17 cm C) 18 cm
D) 14 cm E) 16 cm

16. 8 postes de teléfono están situados a una distancia de 5 m uno del otro. ¿Cuál es la distancia del primero al último poste?



A) 33 m B) 45 m C) 34 m
D) 46 m E) 35 m

17. ¿Cuántos cortes deben hacerse a un aro de 30 metros de longitud para obtener pedazos de 5 metros de longitud?

A) 5 B) 7 C) 8
D) 6 E) 4

18. Un hojalatero tiene una plancha de aluminio de 25 m de largo por 1,5 m de ancho, diario corta 5 m de largo por 1,5 m de ancho. ¿En cuántos días habrá cortado íntegramente la plancha?

A) 7 B) 4 C) 3
D) 6 E) 5

19. En una central telefónica, una telefonista recibe llamadas sin cesar y cada llamada atiende en un intervalo de 4 minutos. Si su trabajo es de 7 horas, ¿cuántas llamadas llega a atender?

A) 110 B) 106 C) 105
D) 107 E) 104

20. Maritza debe censar a 250 personas. El cuestionario de la ocasión amerita un promedio de 12 minutos. ¿Cuál es el tiempo que necesitará Maritza para cumplir su tarea?

A) 4 días B) 2 días y 2 horas C) 2 días
D) 3 días E) 1 día y 2 horas

NIVEL 3

21. Un escolar está parado en una esquina poco transitada y nota que cada 20 minutos pasa un ómnibus. Si está parado durante 6 horas y apenas llegó pasó una, ¿cuántos ómnibus llega a ver?

A) 19 B) 20 C) 21
D) 17 E) 18

22. Alrededor de una mesa circular se ubican sillas cada 3 m. Si el perímetro de la mesa es 54 m, ¿cuántas personas se pueden sentar como máximo en la mesa?



A) 17 B) 16 C) 14
D) 18 E) 15

23. Se tiene un terreno rectangular cuyo perímetro es 60 m. ¿Cuántos postes deberán colocarse cada 3 metros, si cada uno mide 2 metros de longitud?

A) 23 B) 19 C) 10
D) 21 E) 20

24. Janet compra un frasco conteniendo pastillas, y tiene que tomarlas durante los 3 días que está en cama, a razón de 2 pastillas cada 3 horas. Si empezó a tomarlas apenas empezó su reposo hasta que culminó, ¿cuántas pastillas contenía el frasco?

A) 54 B) 48 C) 44
D) 52 E) 50

25. Se tiene una barra de metal de 91 cm de largo, que se desea dividir en trozos de 7 cm de largo cada uno. ¿Cuánto nos cobra el cortador por cada corte, sabiendo que recibió un total de S/.120?

A) S/.11 B) S/.10 C) S/.12
D) S/.13 E) S/.15

26. Un terreno de 40 metros de ancho se requiere cercarlo, colocando 80 estacas cada 5 metros en todo su perímetro. Calcula el largo del terreno.

A) 160 m B) 140 m C) 150 m
D) 180 m E) 170 m

27. En una autopista existen puentes peatonales en los kilómetros 3 y 33. Se desea instalar dos puentes más entre los dos anteriores a igual distancia. ¿Cada cuántos kilómetros se instalarán dichos puentes?

A) 7 km B) 7,5 km C) 10 km
D) 6 km E) 8 km

28. Se ha formado un triángulo con personas, donde en un lado hay 6 personas, en el segundo hay 8 personas y en el tercer lado hay 5 personas. ¿Cuántas personas hay en total, si en cada vértice hay una persona?

A) 17 B) 20 C) 15
D) 16 E) 18

29. ¿Cuántas estacas se necesitan para cercar un terreno de forma cuadrada cuya área es igual a 40 000 m^2, si las estacas se colocan cada 5 metros?

A) 159 B) 140 C) 180
D) 161 E) 160

30. ¿Cuántos cortes deben hacerse a una soga de $(k^2 - 1)$ metros de largo para tener pedazos de $(k - 1)$ metros de largo?



A) $k - 2$ B) k C) $k - 1$
D) $k + 1$ E) $2k$

Claves

NIVEL 1
1. D
2. B
3. E
4. A
5. C
6. B
7. E
8. D
9. A
10. B

NIVEL 2
11. E
12. A
13. C
14. D
15. A
16. E
17. D
18. B
19. C
20. B

NIVEL 3
21. A
22. D
23. E
24. E
25. B
26. A
27. C
28. D
29. E
30. B

Criptoaritmética

Nota

- n.° par + n.° par = n.° par
  Ejemplo: 4 + 6 = 10
- n.° par + n.° impar = n.° impar
  Ejemplo: 8 + 7 = 15
- n.° impar + n.° par = n.° impar
  Ejemplo: 5 + 8 = 13
- n.° impar + n.° impar = n.° par
  Ejemplo: 7 + 5 = 12

La palabra criptoaritmética proviene de dos voces griegas:

KRIPTOS = OCULTO y ARITHMOS = NÚMERO

En los problemas de criptoaritmética se debe encontrar una serie de valores escondidos que hagan válida una operación aritmética. En este capítulo utilizaremos las leyes y reglas básicas de las cuatro operaciones fundamentales: adición, sustracción, multiplicación y división:

Ejemplos:

1. Dada la operación:

$$\begin{array}{r} \overline{2A82} + \\ \overline{377B} \\ 306 \\ \overline{2C5} \\ \hline \overline{D882} \end{array}$$

A + B + C + D es igual a:

Resolución:

En la columna de las unidades: 2 + B + 6 + 5 = ... 2

13 + B = ... 2 ⇒ B = 9

En la columna de las decenas: 8 + 7 + 0 + C + 2 = ... 8

→ se lleva

17 + C = ... 8 ⇒ C = 1

En la columna de las centenas: A + 7 + 3 + 2 + 1 = ... 8

→ se lleva

A + 13 = ... 8 ⇒ A = 5

En la columna de las unidades de millar: 2 + 3 + 1 = D

→ se lleva

D = 6

Finalmente: A + B + C + D = 5 + 9 + 1 + 6 = 21

Nota

- n.° par – n.° par = n.° par
  Ejemplo: 12 – 4 = 8
- n.° par – n.° impar = n.° impar
  Ejemplo: 14 – 9 = 5
- n.° impar – n.° par = n.° impar
  Ejemplo: 11 – 8 = 3
- n.° impar – n.° impar = n.° par
  Ejemplo: 9 – 7 = 2

2. Si A, B y C representan dígitos:

$$\begin{array}{r} \overline{2ABC} \times \\ 3 \\ \hline \overline{ABC1} \end{array}$$

Halla: A + B + C

Resolución:

C × 3 = ... 1 ⇒ C = 7

o sea: C × 3 = 7 × 3 = 21

→ se lleva

B × 3 + 2 = ... 7 ⇒ B = 5

B × 3 + 2 = 5 × 3 + 2 = 17

→ se lleva

A × 3 + 1 = ... 5 ⇒ A = 8

o sea: A × 3 + 1 = 8 × 3 + 1 = 25

→ se lleva

Finalmente: A + B + C = 8 + 5 + 7 = 20

Nota

- n.° par × n.° par = n.° par
  Ejemplo: 6 × 8 = 48
- n.° par × n.° impar = n.° par
  Ejemplo: 8 × 3 = 24
- n.° impar × n.° par = n.° par
  Ejemplo: 5 × 6 = 30
- n.° impar × n.° impar = n.° impar
  Ejemplo: 7 × 9 = 63

Problemas resueltos

1 Si: $a + b + c = 21$
Halla: $\overline{a7b} + \overline{c8a} + \overline{b5c}$

Resolución:

Ordenamos los sumandos y usamos el dato:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,2} \\ \overline{a7b}\,+ \\ \overline{c8a} \\ \overline{b5c} \\ \hline 2321 \end{array}$$

2 Indica la suma de cifras encontradas en:

$$\begin{array}{r} 4\;9\;3\;\times \\ \square \\ \hline \square\;4\;\square\;9 \end{array}$$

Resolución:

$$\begin{array}{r} 4\;9\;3\;\times \\ \boxed{3} \\ \hline \boxed{1}\;4\;\boxed{7}\;9 \end{array}$$

Luego, la suma de cifras será:
$1 + 3 + 7 = 11$

3 Halla: $A + B$
Si: $966 + \overline{AAB} + \overline{8B1} = \overline{2B92}$

Resolución:

Ordenamos los sumandos:

$$\begin{array}{r} 966\,+ \\ \overline{AAB} \\ \overline{8B1} \\ \hline \overline{2B92} \end{array}$$

En la columna de las unidades:
$6 + B + 1 = \ldots 2$
$7 + B = \ldots 2 \Rightarrow B = 5$

En la columna de las decenas:
$1 + 6 + A + B = \ldots 9$
$7 + A + 5 = \ldots 9$
$12 + A = \ldots 9 \Rightarrow A = 7$

Luego: $A + B = 7 + 5 = 12$

4 En la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} \overline{abc}\,\times \\ 8 \\ \hline 2208 \end{array}$$

Calcula: $\overline{bc} - \overline{ab}$

Resolución:

Del dato se tiene:
$\overline{abc} \times 8 = 2208$
$\overline{abc} = \dfrac{2208}{8}$
$\overline{abc} = 276$
Luego: $a = 2$; $b = 7$; $c = 6$
Reemplazamos: $\overline{bc} - \overline{ab} = 76 - 27 = 49$

5 Sabiendo que:
$\overline{TOM} = \dfrac{864}{A} = \dfrac{532}{B}$

Calcula: $\overline{TOM} \times \overline{BA}$

Resolución:

Del dato: $\overline{TOM} = \dfrac{864}{A} \Rightarrow \overline{TOM} \times A = 864$
$\overline{TOM} = \dfrac{532}{B} \Rightarrow \overline{TOM} \times B = 532$

Reemplazamos:

$$\begin{array}{rl} \overline{TOM}\,\times & \\ \overline{B\,A} & \\ \hline 864 & \rightarrow \overline{TOM} \times A \\ 532 & \rightarrow \overline{TOM} \times B \\ \hline 6184 & \end{array}$$

6 Si: $\sqrt[M]{\overline{ANY}} = M$
Calcula: $M + Y + N + Y + N + A$

Resolución:

Elevando al exponente M se tiene:
$\overline{ANY} = M^M$
Nos damos cuenta que un número elevado a él mismo (M^M) debe dar un número de 3 cifras ($\overline{ANY}$), y como M es de 1 cifra. Entonces:
$1^1 = 1$; $2^2 = 4$; $3^3 = 27$; $4^4 = 256$; $5^5 = 3125$
Luego: $M = 4$
$\overline{ANY} = 4^4 \Rightarrow \overline{ANY} = 256$
$A = 2$; $N = 5$; $Y = 6$
Finalmente: $M + Y + N + Y + N + A = 28$

7 Sabiendo que:

$$\begin{array}{r} \overline{ad}\ + \\ \overline{bd}\ \\ \overline{cd}\ \\ \hline 142 \end{array}$$

Calcula: $E = \sqrt{a + b + c - d}$

Resolución:

En la columna de las unidades:
$d + d + d = \ldots 2$
$3d = \ldots 2 \Rightarrow d = 4$

En la columna de las decenas:
$a + b + c + 1 = 14$
$\Rightarrow a + b + c = 13$

Reemplazamos:
$E = \sqrt{a + b + c - d}$
$E = \sqrt{13 - 4}$
$E = \sqrt{9} = 3$

8 Si: $a + b + c = 13$ y $\overline{ab} + \overline{bc} = 97$
Halla $a \times b$

Resolución:

Ordenamos los sumandos:

$$\begin{array}{r} \overline{ab}\ + \\ \overline{bc}\ \\ \hline 97 \end{array}$$

En la columna de las unidades:

$b + c = \ldots 7 \Rightarrow \begin{cases} b + c = 7 \\ b + c = 17 \end{cases}$

Como:
$a + b + c = 13$, $b + c = 17$ no cumple

Luego:
$b + c = 7 \Rightarrow a + \underbrace{b + c}_{7} = 13$
$a + 7 = 13 \Rightarrow a = 6$

En la columna de las decenas:
$a + b = 9$
$6 + b = 9 \Rightarrow b = 3$

Finalmente: $a \times b = 6 \times 3 = 18$

9 Sabiendo que $\overline{ab} + \overline{ba} = 66$ y que **a** es mayor que **b**. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar $a \times b$?

Resolución:

Ordenamos los sumandos:

$$\begin{array}{r} \overline{ab}\ + \\ \overline{ba}\ \\ \hline 66 \end{array}$$

En la columna de las unidades:
$b + a = 6$, como $a > b$ se tiene:

b	a	
1	5	$\Rightarrow a \times b = 5$
2	4	$\Rightarrow a \times b = 8$

Luego, el máximo valor de $a \times b$ es 8.

10 A, B y C son dígitos en la multiplicación:

$$\begin{array}{r} \overline{BA}\ \times \\ 7\ \\ \hline \overline{CAA} \end{array}$$

El valor de $A + B + C$ es:

Resolución:

Del dato se tiene:
$7 \times A = \ldots A$
$\quad\downarrow \qquad \downarrow$
$\quad 5 \qquad 5 \Rightarrow A = 5$

Entonces $7 \times A = 7 \times 5 = 35$; se escribe 5 y se lleva 3

$7 \times B + 3 = \overline{CA}$
$7 \times B + 3 = \overline{C5}$
$\quad\downarrow \qquad\quad \downarrow$
$\quad 6 \qquad\quad 4 \Rightarrow B = 6, C = 4$

Finalmente: $A + B + C = 5 + 6 + 4 = 15$

11 En la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} \overline{abc}\ \times \\ 9\ \\ \hline 2133 \end{array}$$

Calcula: $\overline{ca} - \overline{bc}$

Resolución:

$\overline{abc} \times 9 = 2133 \Rightarrow \overline{abc} = 237$
Luego: $a = 2$; $b = 3$; $c = 7$
$\therefore \overline{ca} - \overline{bc} = 72 - 37 = 35$

Actividades de razonamiento

1. Si:

$$\begin{array}{r} * * * * \times \\ 9 \\ \hline * 7 1 4 3 \end{array}$$

Halla la suma de cifras de los asteriscos.

A) 1 B) 23 C) 20
D) 14 E) 17

2. Halla la suma de cifras del multiplicando en:

$$\begin{array}{r} * * * \times \\ 3 \\ \hline * 0 6 1 \end{array}$$

A) 20 B) 26 C) 21
D) 32 E) 29

3. Si:

$$\begin{array}{l} \overline{AVC} + \\ \overline{VC5} \\ \overline{592} \end{array}$$

Halla: V + A + C + A

A) 14 B) 18 C) 22
D) 16 E) 20

4. Halla: B + A + B + A

Si: $\overline{AA89} - \overline{A0BB} = 223$; donde 0: cero

A) 16 B) 28 C) 32
D) 20 E) 24

5. Si. $(a + b)^4 = 81$

Halla: $\overline{ab} + \overline{ba}$

A) 66 B) 33 C) 44
D) 22 E) 55

6. Indica la menor cifra encontrada en:

$$\begin{array}{r} \square\ 4\ 2\ 5 \times \\ 6\ \square\ 2\ \square \\ \hline 1\ \square\ 0 \end{array}$$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 2 E) 0

7. Si: $3 \times N = ... 18$

Calcula las dos últimas cifras en las que termina N.

A) 36 B) 19 C) 06
D) 26 E) 16

8. Si: $(a + b + c)^2 = 144$

Calcula: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$

A) 1222 B) 1322 C) 1532
D) 1332 E) 1432

9. Si: $a \times \overline{ab} = 188$

$b \times \overline{ab} = 329$

Calcula: $\overline{ab} \times \overline{ba}$

A) 3578 B) 2345 C) 4832
D) 2355 E) 3478

10. Si: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = \overline{1cc6}$

Calcula: $\sqrt{a+b+c}$

A) 12 B) 5 C) 8
D) 4 E) 3

11. Si: $\overline{x4y8} + \overline{3w5z} = \overline{8x90}$

Calcula: $(x+y+z+w)^z$

A) 121 B) 64 C) 36
D) 144 E) 100

12. Calcula: $x - y$

Si: $\overline{xy} \cdot \overline{yx} = 1855$

A) 10 B) 6 C) 2
D) 8 E) 4

13. Si: $\overline{abc} + \overline{cba} = 888$

Además: $a - c = 4$

Halla: $a \times b \times c$

A) 24 B) 12 C) 20
D) 48 E) 36

14. Si: $A^{A+4} = \overline{BC}$

Halla: $\dfrac{A+B+C}{3}$

A) 3 B) 2 C) 6
D) 4 E) 5

Claves

1. E
2. C
3. D
4. A
5. B
6. E
7. C
8. D
9. E
10. D
11. A
12. C
13. D
14. D

Reto



Con los valores que se obtienen de la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{r} \overline{a\ a\ a\ a} \ \times \\ 3\ 5 \\ \hline 3\ 3\ 3\ 3\ 0 \\ b\ 9\ c\ 9\ 8\ \ \\ \hline d\ 3\ 3\ 3\ 1\ 0 \end{array}$$

Calcula: $\left(\dfrac{\overline{abcd}+8}{\overline{b00}} + d\right)^{\frac{1}{6}}$

Rpta.: 2

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Si:

$$\begin{array}{r} \overline{A\,B\,C}\,+ \\ \overline{C\,4\,5} \\ \hline \overline{B\,C\,7} \end{array}$$

Halla: A + B + C

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

2. Si: a + b = 17, con: a > b

Halla: $\overline{aba} + \overline{bab}$

A) 1887 B) 1888 C) 1877 D) 1777 E) 1787

3. Si: A + B + C = 18

Halla: $\overline{ABC} + \overline{BCA} + \overline{CAB}$

A) 1888 B) 1898 C) 1989 D) 1998 E) 1999

4. Si: $\overline{CAR} \times 3 = ...1377$

Halla: C + A + R + A

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

5. Si: a + b + c = 29

Halla: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$

A) Absurdo B) 3119 C) 3129
D) 3329 E) 3219

6. Si: $\overline{b53c} + \overline{a6b} + \overline{7ca} = \overline{61cb}$

Halla: a – b + 2c

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

7. Si: $\overline{PQR} + \overline{RQP} = 666$ y R – P = 2

Halla: P + Q + R

A) 11 B) 10 C) 9 D) 12 E) 13

8. Si: $\sqrt[3]{\overline{BCA}} = 8$

Halla: B + C + A

A) 10 B) 8 C) 12 D) 14 E) 15

9. Si: a + b + c = 13

Halla: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$

A) 1343 B) 1434 C) 1444 D) 1443 E) 1534

10. Si: $\overline{HORA} \times 9 = 11403$

Calcula: A + H + 0 + R + A

A) 32 B) 29 C) 23 D) 35 E) 26

NIVEL 2

11. Si: $(a + b)^2 = 169$

Halla: $\overline{ab} + \overline{ba}$

A) 143 B) 133 C) 144 D) 134 E) 153

12. Si: $(\overline{AB})^2 = \overline{18A9}$

Halla: A + B

A) 7 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

13. Si: $a \times \overline{ab} = 425$
$b \times \overline{ab} = 680$
Calcula: $(\overline{ba})^2$
A) 5765 B) 7225 C) 4275 D) 6840 E) 4850

14. Si: $\overline{cbc} + \overline{b35} = \overline{1cc7}$
Halla: $2b + 3c$
A) 20 B) 24 C) 16 D) 26 E) 14

15. Calcula $A \times B$, si: $\overline{AAB} + \overline{BAA} = 1473$
A) 30 B) 27 C) 28 D) 32 E) 40

16. Si:

$$\begin{array}{rrrrl} & & 4 & * & \times \\ & & * & 7 & \\ \hline & * & * & 3 & + \\ & * & * & & \\ \hline * & * & * & * & \end{array}$$

Halla la suma de las cifras que reemplazan a los asteriscos.
A) 36 B) 38 C) 39 D) 40 E) 44

17. Si:

$$\begin{array}{rl} \overline{2\,M\,U\,J\,E\,R} & \times \\ 3 & \\ \hline \overline{M\,U\,J\,E\,R\,2} & \end{array}$$

Halla: M + U + J + E + R
A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

18. Si: $\overline{xy} \, . \, x = 111$; $\overline{xy} \, . \, y = 259$
Halla: $x + y$
A) 8 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

19. Si: $A^{A+3} = \overline{BCD}$
Halla: $\dfrac{A + B + C + D}{3}$
A) 6 B) 8 C) 5 D) 12 E) 7

20. Si: $B + C + 2A = 18$
Además: $1500 < \overline{ABCA} < 1800$
Halla: $A \times B \times C$
A) 58 B) 71 C) 73 D) 63 E) 66

NIVEL 3

21. Si: $\sqrt[3]{\overline{BCA}} = 9$
Halla: $B + A + C + A$
A) 27 B) 25 C) 24 D) 28 E) 30

22. Si:

$$\begin{array}{ccccl} C & A & P & A & + \\ S & O & P & A & \\ \hline P & U & U & M & \end{array}$$

O = cero; $A > M$ y $C > S$
Halla: $C + U + M + P + A$
A) 24 B) 25 C) 28 D) 30 E) 23

23. Si:

$$\begin{array}{rrrrl} & & 4 & * & \times \\ & & 3 & * & \\ \hline & 2 & * & 4 & + \\ 1 & * & * & & \\ \hline * & 5 & 5 & * & \end{array}$$

Halla la suma de todos los asteriscos.

A) 27 B) 28 C) 29 D) 30 E) 31

24 Si:

$\overline{abc} \times a = 5481$

$\overline{abc} \times b = 6264$

$\overline{abc} \times c = 2349$

Halla la suma de las cifras de $\overline{abc}^2$.

UNMSM 2010-I

A) 30 B) 27 C) 20 D) 32 E) 22

25 Si: $\overline{ECO} = (E + C + O)^3$; $O \neq$ cero

Calcula: E^{C^O}

A) 1 B) 9 C) 8 D) 5 E) 25

26 Si:

```
3 * 4 * * | * *
* *       |---------
-----       * 6 * *
– 8 *
  * *
---------
– – * *
    * 8
    ----
    – 8
```

Halla la suma de las cifras del cociente.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

27 Si:

```
  T O C ×
  T O C
---------
E N T R E
```

y $O =$ cero

Halla: $T + R + E + N$

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

28 Halla el mayor valor de $M + A + R$, sabiendo que las letras representan a números impares.

```
 R A M A +
 A M A R
---------
 9 3 2 8
```

A) 11 B) 12 C) 14 D) 17 E) 16

29 Halla la suma de las cifras del producto si:

```
        5 * 4 ×
          * 5
    -----------
      2 * * *  +
    * 1 * 6
    -----------
    * * 5 3 *
```

A) 10 B) 12 C) 15 D) 11 E) 17

30 Halla la suma de las cifras del menor dividendo.

```
3 * * * 9 | * 9
* 9       |----------
----        * * * *
– – * * *
    * 1 *
    -----
    – – *
```

A) 18 B) 19 C) 20 D) 23 E) 22

Claves

NIVEL 1			
1. D	9. D	17. D	25. D
2. A	10. C	18. B	26. C
3. D	NIVEL 2	19. E	27. E
4. C	11. A	20. D	28. D
5. A	12. A	NIVEL 3	29. E
6. A	13. B	21. A	30. D
7. C	14. B	22. E	
8. B	15. E	23. E	
	16. E	24. B	

Promedios

> **Atención**
>
> Cuando solo nos dicen promedio, se debe entender que se hace referencia al promedio aritmético.



> **Nota**
>
> Si se conoce el promedio aritmético de una cantidad de datos, entonces se conoce la suma de estos datos:
>
> Ejemplo:
>
> $MA = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$
>
> $\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = n(MA)$

> **Nota**
>
> Si se conoce el promedio geométrico de una cantidad de datos, entonces se conoce el producto de estos datos:
>
> Ejemplo:
>
> $MG = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n}$
>
> $\Rightarrow a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n = (MG)^n$

> **Nota**
>
> Si se conoce el promedio armónico de una cantidad de datos, entonces se conoce la suma de inversas de los datos:
>
> Ejemplo:
>
> $MH = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$
>
> $\Rightarrow \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + ... + \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{n}{MH}$

DEFINICIÓN

Un promedio es una cantidad representativa de un conjunto de datos, cuyo valor está comprendido entre el menor y mayor de los datos.

Ejemplo:
En el siguiente cuadro se muestra el gasto diario de un ama de casa.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Gastos	S/.15	S/.16	S/.17	S/.18	S/.19	S/.20	S/.21

Sea P el promedio entonces: $\underbrace{15}_{\text{menor dato}} < P < \underbrace{21}_{\text{mayor dato}}$

Entre los promedios más importantes tenemos:

Promedio aritmético o media aritmética (MA)

$$MA = \frac{\text{Suma de datos}}{\text{Cantidad de datos}}$$

Ejemplo:
Calcula la media aritmética de las temperaturas de 5 ciudades, las cuales son: 35°; 37°; 40°; 32° y 41°.

Resolución:

$$MA = \frac{35° + 37° + 40° + 32° + 41°}{5} = \frac{185°}{5} = 37°$$

Promedio geométrico o media geométrica (MG)

$$MG = \sqrt[\text{cantidad de datos}]{\text{Producto de datos}}$$

Ejemplo:
Calcula la media geométrica de 2; 4 y 27.

Resolución:

$$MG = \sqrt[3]{2 \times 4 \times 27} = \sqrt[3]{2 \times 2^2 \times 3^3} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3} = 6$$

Promedio armónico o media armónica (MH)

$$MH = \frac{\text{Cantidad de datos}}{\text{Suma de la inversa de los datos}}$$

Ejemplo:
Calcula la media armónica de 2; 5 y 6.

$$MH = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{\frac{15 + 6 + 5}{30}} = \frac{3}{\frac{26}{30}} = \frac{45}{13}$$

Problemas resueltos

1 Halla el promedio de los siguientes números:

$\underbrace{30; 30; 30; ...; 30}_{\text{"10" veces}}; \underbrace{25; 25; 25; ...; 25}_{\text{"20" veces}}$

Resolución:

$$\text{Promedio} = \frac{30(10) + 25(20)}{10 + 20} = \frac{300 + 500}{30} = \frac{800}{30}$$

$$\text{Promedio} = \frac{80}{3}$$

$\therefore$ Promedio $= 26,\overset{\frown}{6}$

2 Si el promedio de tres números consecutivos es 15, calcula el promedio de los tres números consecutivos siguientes.

Resolución:

Sean los números consecutivos: x, $x + 1$, $x + 2$

Por condición del problema:

$$\frac{x + x + 1 + x + 2}{3} = 15$$

$$3x + 3 = 45$$

$$3x = 42 \Rightarrow x = 14$$

Luego: $x + 1 = 15$ y $x + 2 = 16$

Los 3 números consecutivos siguientes serán: 17; 18 y 19

$$\text{Promedio} = \frac{17 + 18 + 19}{3}$$

$\therefore$ Promedio $= 18$

3 El promedio de las edades de los cinco hermanos es de 18 años, donde sus edades están en relación de 3; 5; 6; 7 y 9. Calcula la edad del mayor.

Resolución:

Sean las edades de los cinco hermanos: $3k$, $5k$, $6k$, $7k$ y $9k$

Por condición del problema:

$$\frac{3k + 5k + 6k + 7k + 9k}{5} = 18$$

$$\frac{30k}{5} = 18$$

$$6k = 18 \Rightarrow k = 3$$

$\therefore$ La edad del mayor es: $9(3) = 27$

4 Si la MA de "a" y 21 es 15 y la MA de "b" y 8 es 12. Calcula la MG de a y b.

Resolución:

$$MA(a;21) = 15 \Rightarrow \frac{a + 21}{2} = 15 \Rightarrow a + 21 = 30 \Rightarrow a = 9$$

$$MA(b; 8) = 12 \Rightarrow \frac{b + 8}{2} = 12 \Rightarrow b + 8 = 24 \Rightarrow b = 16$$

$$\therefore MG(a; b) = \sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12$$

5 La media aritmética de 8 números es 15. Si la media aritmética de 5 de ellos es 12, ¿cuál es la media aritmética de los otros 3 números?

Resolución:

Sean los 8 números: $a_1, a_2, a_3, ..., a_8$

Por dato: $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_8}{8} = 15$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_8 = 120$$

También: $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = 12$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 60$$

Luego: $\dfrac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_6 + a_7 + a_8}{8} = 15$

$$60 + a_6 + a_7 + a_8 = 120$$

$$a_6 + a_7 + a_8 = 60$$

Finalmente: $MA(a_6; a_7; a_8) = \dfrac{60}{3} = 20$

6 La media aritmética de dos números es 8. Si se cuadruplica el primer número y el segundo se disminuye en 3 unidades, el nuevo promedio es 11. Calcula la diferencia de dichos números.

Resolución:

Sean "a" y "b" los números.

$MA(a; b) = 8 \Rightarrow \dfrac{a + b}{2} = 8 \Rightarrow a + b = 16$ ...(I)

Luego: $MA(4a; b - 3) = 11 \Rightarrow \dfrac{4a + b - 3}{2} = 11$

$\Rightarrow 4a + b = 25$ ...(II)

De (I) y (II): $a = 3$, $b = 13$

$\therefore 13 - 3 = 10$

7 Si la MH de a y 6 es 15/2 y la MH de 8 y b es 48/5. Calcula el valor de la MA de a y b.

Resolución:

$$MH(a;\ 6) = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{2(a)(6)}{a+6} = \frac{15}{2}$$
$$8a = 5a + 30$$
$$3a = 30 \Rightarrow a = 10$$

$$MH(8;\ b) = \frac{48}{5} \Rightarrow \frac{2(8)(b)}{8+b} = \frac{48}{5}$$
$$5b = 24 + 3b$$
$$2b = 24 \Rightarrow b = 12$$

Finalmente: $MA(a;\ b) = \frac{10+12}{2} = 11$

8 Si:

A = MG de 9 y 4

B = MG de 3 y 27

C = MG de 2 y 32

D = MG de 8 y 2

Calcula la MH de A; B; C y D.

Resolución:

$A = MG(9;\ 4) \Rightarrow A = \sqrt{9 \times 4}$
$A = 6$

$B = MG(3;\ 27) \Rightarrow B = \sqrt{3 \times 27}$
$B = 9$

$C = MG(2;\ 32) \Rightarrow C = \sqrt{2 \times 32}$
$C = 8$

$D = MG(8;\ 2) \Rightarrow D = \sqrt{8 \times 2}$
$D = 4$

Luego: $MH(A;\ B;\ C;\ D) = \dfrac{4}{\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}$

$$= \frac{4}{\frac{47}{72}}$$

$\therefore MH(A;\ B;\ C;\ D) = \frac{288}{47}$

9 El promedio aritmético de los números:
$(a-5);(a-3);(a-1);(a+1);(a+3);(a+5);(a+7)$ es 25.
Calcula el valor de "a".

Resolución:

Por condición del problema:

$$\frac{(a-5)+(a-3)+(a-1)+(a+1)+(a+3)+(a+5)+(a+7)}{7} = 25$$

$\Rightarrow 7a + 7 = 175$
$7a = 168 \Rightarrow a = 24$

$\therefore$ El valor de "a" es 24.

10 El promedio de 18 números es 35. Si a cada uno de estos 18 números le agregamos 5 unidades, ¿en cuánto aumentará el promedio?

Resolución:

Sean los 18 números: $a_1;\ a_2;\ a_3;\ ...\ ;\ a_{18}$

Por dato del problema:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{18}}{18} = 35$$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{18} = 630$

Luego agregamos 5 unidades a cada número:

$$\frac{(a_1+5)+(a_2+5)+(a_3+5)+...+(a_{18}+5)}{18}$$

$$= \frac{(a_1+a_2+a_3+...+a_{18})+5\times 18}{18}$$

$$= \frac{630+90}{18} = \frac{720}{18} = 40$$

$\therefore$ El promedio aumenta en 5.

11 Si: la MA de "a" y 15 es 12 y
la MG de "b" y 16 es 8.
Calcula la MH de a y b.

Resolución:

$MA(a;\ 15) = 12 \Rightarrow \frac{a+15}{2} = 12 \Rightarrow a = 9$

$MG(b;\ 16) = 8 \Rightarrow \sqrt{b \times 16} = 8 \Rightarrow b = 4$

Luego:

$MH(a;\ b) = MH(9;\ 4)$

$$= \frac{2}{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}} = \frac{72}{13}$$

Actividades de razonamiento

1. Calcula la media aritmética de los siguientes números:

$\underbrace{6; 6; ...; 6}_{\text{6 veces}}$ $\underbrace{8; 8; ...; 8}_{\text{14 veces}}$ $\underbrace{9; 9; ...; 9}_{\text{20 veces}}$

A) 8,2 B) 8,4 C) 8,6
D) 8 E) 8,1

2. El promedio de 5 números consecutivos es 21. ¿Cuál es el menor número?

A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

3. Si:
A = MA de 11 y 5
B = MA de 36 y 28
Calcula la MG de A y B.

A) 12 B) 14 C) 16
D) 20 E) 18

4. Si:
M = MA de 7 y 5
N = MG de 27 y 3
Calcula la MH de M y N.

A) 8,2 B) 7,2 C) 6,3
D) 7 E) 8

5. El promedio aritmético de las edades de 6 hermanos es 16, donde sus edades están en la relación de 2; 3; 5; 6; 7 y 9. Calcula la edad del mayor.

A) 21 años B) 18 años C) 15 años
D) 27 años E) 9 años

6. La media aritmética de 4 números es 35. Si la media aritmética de los dos primeros es 28, calcula el promedio de los dos últimos.

A) 40 B) 38 C) 45
D) 36 E) 42

7. El promedio aritmético de 9 números es 36, si la suma de los 6 primeros es 198, ¿cuál es el promedio aritmético de los otros 3 números?

A) 42 B) 45 C) 40
D) 41 E) 46

8. La MA de 3 números es M; si aumentamos un cuarto número, la MA será "M + 1". ¿Cuál es ese cuarto número?

A) M B) M + 4 C) M + 3
D) 1 E) M + 1

9. El promedio de las edades de 5 hermanos es 26 años. Si el promedio de las edades de 3 de ellos es 30 años, ¿cuál es el promedio de los otros 2?

A) 18 años B) 16 años C) 20 años
D) 25 años E) 24 años

10. La media aritmética de 80 números es 75. Si la media aritmética de los primeros 60 números es 50, halla la media aritmética de los restantes.

A) 120 B) 135 C) 140
D) 150 E) 130

11. Halla el promedio armónico de 10; 12; 20 y 30.

A) 16 B) 15 C) 18
D) 20 E) 12

12. El promedio de 4 números es (k + 8). Si 3 de los números es 9; 10 y 13, ¿cuál es el cuarto número?

A) 4k B) 4k + 1 C) 4k + 8
D) 40 E) 4

13. La media aritmética de las edades de Ariana y Beatriz es 24 años, de Ariana; y Camila es 20 años y la media aritmética de las edades de Camila y Beatriz es 16 años. ¿Cuál es la media aritmética de las edades de Ariana, Beatriz y Camila?

A) 18 años B) 20 años C) 23 años
D) 22 años E) 25 años

14. El promedio aritmético de 6 números impares consecutivos es 20. Halla el promedio geométrico de la tercera parte del menor y la quinta parte del mayor.

A) 6 B) 8 C) 5
D) 7 E) 9

Claves

1. A
2. B
3. C
4. B
5. D
6. E
7. A
8. B
9. C
10. D
11. B
12. A
13. B
14. C

Reto



Calcula la MH de dos números "a" y "b" cuya MA es 20 y su MG es 10.

Rpta.: 5

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. El promedio de 2 números pares consecutivos es 17, calcula el promedio de los dos números pares consecutivos siguientes.
A) 21 B) 19 C) 16 D) 23 E) 24

2. El promedio de 3 números consecutivos es 12, calcula el promedio de los tres números consecutivos siguientes.
A) 17 B) 18 C) 13 D) 15 E) 14

3. El promedio de 3 números impares consecutivos es 15, calcula el promedio de los tres números impares consecutivos siguientes:
A) 26 B) 22 C) 21 D) 24 E) 20

4. El promedio de 3 números es 20. Si la suma de los dos primeros es 39, ¿cuál es el tercer número?
A) 17 B) 20 C) 21 D) 19 E) 23

5. El promedio de 4 números es 36. Si la suma de los dos primeros es 40; ¿cuál es el promedio de los 2 números siguientes?
A) 50 B) 56 C) 48 D) 60 E) 52

6. Calcula el valor de x sabiendo que el promedio de los números 8; 9; 10; 11; 13; 14; x es 12.
A) 21 B) 19 C) 20 D) 17 E) 18

7. La media aritmética de 4 números es 31. Si la media aritmética de los dos primeros es 23, calcula el promedio de los dos últimos.
A) 41 B) 37 C) 38 D) 39 E) 32

8. El promedio aritmético de las edades de 4 hermanos es 21, donde sus edades están en la relación de 2; 3; 4 y 5. Calcula la edad del menor más el mayor.
A) 36 B) 42 C) 43 D) 40 E) 48

9. La media aritmética de dos números es 6. Si la relación de dichos números es de 1 a 2, halla el mayor de ellos.
A) 10 B) 6 C) 4 D) 8 E) 12

10. La siguiente tabla muestra la distribución de las edades de una clase. Halla la edad promedio.

Número de alumnos	4	2	5	6	3
Edades	20	18	16	14	15

A) 16,25 B) 17 C) 15,6 D) 14 E) 18

NIVEL 2

11. Calcula el promedio de los siguientes números:
$$\underbrace{10;\ 10;\ 10;\ \ldots;\ 10}_{20\text{ veces}};\ \underbrace{30;\ 30;\ 30;\ \ldots;\ 30}_{40\text{ veces}}$$
A) 22 B) 24 C) $23,\overset{\frown}{3}$ D) 22,6 E) 26

12. Si el promedio de 5 números consecutivos es 20, calcula el promedio de los 3 números consecutivos siguientes.

A) 25 B) 24 C) 28 D) 30 E) 26

13. La media aritmética de dos números es 9. Si se triplica el primero y el segundo se disminuye en 2 unidades, el nuevo promedio es 15. Calcula la diferencia de dichos números.

A) 3 B) 6 C) 2 D) 4 E) 5

14. Si la media geométrica de "a" y 12 es 6, halla a.

A) 2 B) 7 C) 4 D) 5 E) 3

15. Si: A = MA de 3 y 5
B = MA de 6 y 10
Calcula la MG de A y B.

A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 6 D) 5 E) $3\sqrt{2}$

16. La media aritmética de 6 números pares consecutivos es 13. Calcula la media aritmética de los dos mayores.

A) 12 B) 15 C) 17 D) 13 E) 16

17. El promedio aritmético de las edades de 3 hermanos es 20, donde sus edades están en la relación de 5; 3 y 2. Calcula la edad del menor.

A) 14 B) 16 C) 18 D) 12 E) 15

18. Dos números están en la relación de 16 y 9. ¿En qué relación estarán su media aritmética y su media geométrica?

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{25}{24}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{16}{25}$ E) $\frac{5}{2}$

19. Si la MA de dos números es 17 y la MG de los mismos es 15, halla dichos números e indica la diferencia de ellos.

A) 18 B) 16 C) 13 D) 20 E) 15

20. Si: M = MA de 4 y 8
N = MG de 3 y 27
Calcula la MH de M y N.

A) 7,2 B) 9 C) 8,3 D) 6,4 E) 7

NIVEL 3

21. La MG de 2 números es 6 y la MG de otros 2 números es 4. Halla la MG de los 4 números.

A) $\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

22. El promedio de las edades de 8 padres de familia es 36 años. Se considera un noveno padre de familia y el promedio disminuye en 2 años. ¿Cuál es la edad del noveno padre de familia?



A) 23 años B) 22 años C) 18 años
D) 19 años E) 20 años

23. Halla 2 números sabiendo que su media aritmética es 5 y su media armónica es 24/5.

A) 6 y 5 B) 4 y 5 C) 8 y 2
D) 6 y 4 E) 7 y 3

24. Calcula la media aritmética de los siguientes números:

$\underbrace{6; 6; ...; 6}_{6\text{ veces}}; \underbrace{8; 8; ... ; 8}_{14\text{ veces}}; \underbrace{9; 9; ...; 9}_{20\text{ veces}}$

A) 8,6 B) 8,1 C) 8,4 D) 8,2 E) 8

25. El promedio de 20 números es 25, si se le agrega un número más al promedio sigue siendo 25. ¿Cuál es el nuevo número?

A) 2 B) 26 C) 23
D) 27 E) 25

26. El promedio geométrico de 8 números es 8 y el promedio geométrico de otros 8 números es 4. ¿Cuál es el promedio geométrico de los 16 números?

A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) 4 E) 5

27. La MH de 2 números es 3 y la MH de otros 3 números es 2. Halla la MH de los 5 números.

A) $\frac{25}{13}$ B) $\frac{30}{13}$ C) $\frac{15}{7}$ D) $\frac{15}{13}$ E) $\frac{5}{2}$

28. El promedio aritmético de 7 números es 26. Si la suma de los cinco primeros es 66, ¿cuál es el promedio aritmético de los otros dos números?

A) 78 B) 46 C) 116
D) 68 E) 58

29. El doble de la MA de dos números es igual al cuadrado de su MG más 1. Si uno de los números es 120, ¿cuál es el otro?

A) 1 B) 3 C) 4
D) 5 E) 2

30. Sabiendo que la MA de dos números es a la MG de los mismos como 5 es a 3, calcular la razón de los números.

A) 12 B) 9 C)7
D) 6 E) 10

Claves

NIVEL 1			
1. A	10. A	18. B	26. C
2. D	NIVEL 2	19. B	27. B
3. C	11. C	20. A	28. E
4. C	12. B	NIVEL 3	29. A
5. E	13. D	21. C	30. B
6. B	14. E	22. C	
7. D	15. B	23. D	
8. B	16. C	24. D	
9. D	17. D	25. E	

UNIDAD 2



Convive con nosotros

El porcentaje o tanto por ciento aparece en nuestra vida cotidiana más de lo que imaginamos, como por ejemplo cuando realizamos una descarga de un programa de internet, la barra de descargas está en porcentaje, también cuando vamos de compras, las tiendas te ofrecen descuentos del 20%, otro ejemplo es cuando vamos al banco a solicitar un préstamo y nos indican que el interés del préstamo es del 10% mensual y hasta en las elecciones de nuestras autoridades las vemos cuando indican que el candidato "x" tiene un 29%, el candidato "y" tiene un 26%, el candidato "z" tiene un 23% y, nulos y viciados 22%. Como observarás el porcentaje vive con nosotros, por ende tenemos que comprenderlo y entenderlo para una buena convivencia.

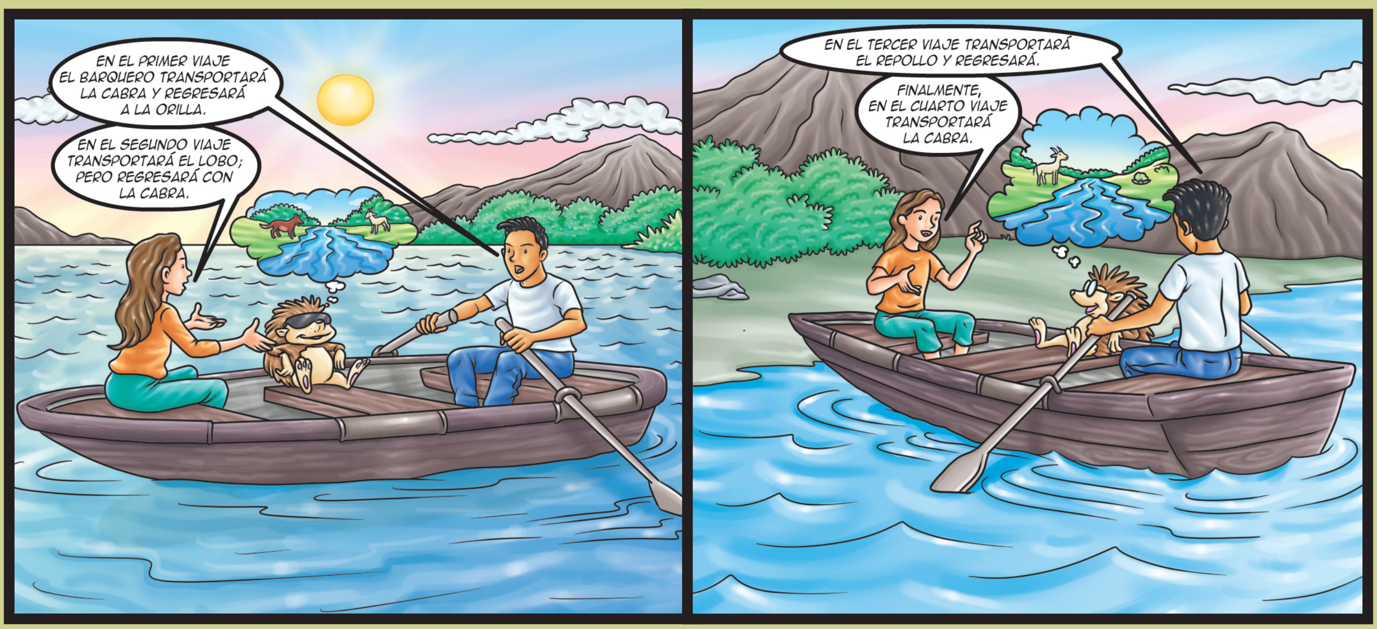
Matemática recreativa

La travesía del barquero

En la orilla de un río se encuentra un lobo, una cabra y un gran repollo; no hay más que un barquichuelo tan pequeño, que únicamente da cabida al barquero y a una sola de tales cosas. ¿En qué forma puede hacerse la travesía para evitar que el lobo se coma la cabra, o esta al repollo, durante la ausencia del barquero?



DIÁLOGO



Operadores matemáticos

Importante

Las operaciones que se muestran en el cuadro de la derecha no son las únicas. También existen las operaciones de potenciación y radicación.



OPERACIÓN MATEMÁTICA

Es una relación de una o más cantidades que dan origen a otra cantidad llamada resultado.
Las operaciones matemáticas básicas universalmente conocidas son las siguientes:

Operación básica	Operador
Adición	+
Sustracción	–
Multiplicación	×
División	÷

Ejemplo:

$$3 + 7 = 10$$

- 3 y 7: CANTIDADES QUE SE OPERAN
- +: OPERADOR
- 10: RESULTADO
- 3 + 7: OPERACIÓN DE ADICIÓN

OPERADOR MATEMÁTICO

Es un símbolo, que al asociarse a una o más cantidades establece una operación matemática que obedece a una determinada regla de operación.

Operadores no convencionales	Operador
*	Operador asterisco
#	Operador grilla
△	Operador triángulo
□	Operador cuadrado
▭	Operador rectángulo
○	Operador circunferencia, etc.

Recuerda

El nombre particular que se les da a los operadores es según el símbolo o figura a la que representan.



Operadores simples

Son aquellos donde la regla de operación establecida por el operador es el resultado de aplicar dicha regla a una o más cantidades numéricas.
Ejemplos:

1. Dado: $a * b = 3a + b$
   Calcula: $8 * 12$

   Resolución:

   $$a * b = 3a + b$$

   - $*$: Operador asterisco
   - $3a + b$: Regla de operación
   - a: 1.ª componente
   - b: 2.ª componente

   Piden: $8 * 12 = 3(8) + 12$
   $= 24 + 12$
   $= 36$

2. Si: $\boxed{x} = \dfrac{x+4}{x-2}$

Calcula: $\boxed{5}$

Resolución:

$\boxed{5} = \dfrac{5+4}{5-2}$

$\boxed{5} = 3$

Operadores compuestos

Se llaman así cuando en una expresión el operador se repite dos o más veces.
Se recomienda realizar lo siguiente:

1.° Se deben desarrollar las operaciones que están entre paréntesis.
2.° Si hay operaciones ubicadas entre varios signos de agrupación (llaves, corchetes, paréntesis, etc.), se debe empezar por la operación que está más en el interior.

Ejemplos:

1. Si: $M \triangle N = 3M + 2N$

Halla: $E = (2 \triangle 1) \triangle 5$

Resolución:

Primero calculamos $(2 \triangle 1)$:

$(2 \triangle 1) = 3(2) + 2(1)$
$= 6 + 2$
$= 8$

Luego, reemplazamos en E:

$E = (2 \triangle 1) \triangle 5$
$E = 8 \triangle 5$
$E = 3(8) + 2(5)$
$E = 24 + 10$
$E = 34$

2. Si: $\textcircled{x} = x^2 + 1$

Halla: $M = \textcircled{\textcircled{3}}$

Resolución:

Primero calculamos:

$\textcircled{3} = 3^2 + 1$
$= 10$

Luego, reemplazamos en M:

$M = \textcircled{\textcircled{3}}$
$M = \textcircled{10}$
$M = 10^2 + 1$
$M = 101$

Atención

El procedimiento para efectuar un operador matemático consiste en reemplazar convenientemente en la expresión equivalente, las letras por los números, así:

$a * b = 2a + b$
↓ ↓
$3 * 5 = 2(3) + 5$
$= 11$



Efectuar

1. Si: $a \# b = a + b - 3$
Calcula: $3 \# 4$

2. Si: $a \triangle b = ab - a$
Calcula: $(-2) \triangle (-1)$

3. Si: $a \varnothing b = a^b - a$
Calcula: $10 \varnothing 1$

4. Si: $\triangle_{x} = x + x^2$
Calcula: $\triangle_{4} + \triangle_{5}$

5. Si: $\boxed{a} = 3a + 2^a$
Calcula: $\boxed{-2}$

6. Si: $x \square y = x^y - y^x$
Calcula: $3 \square 2$

7. Si: $x \triangle y = \sqrt[y]{x}$
Halla: $9 \triangle 2 + 8 \triangle 3$

8. Si: $a \# b = (b - a)^2$
Halla: $(1 \# 3) \# 2$

9. Si: $\boxed{a} = 2\sqrt{a} + 2a^2$
Calcula: $\boxed{\boxed{4}}$

10. Si: $\textcircled{a} = 3a^2 - 1$
Halla: $\textcircled{\textcircled{2}}$

Problemas resueltos

1 Sabemos que:

$$a\int^{b} = \frac{2(a-b)}{3}$$

Halla: $8\int^{5}$

Resolución:

Identificamos el operador matemático y su regla de operación.

$$8\int^{5} = \frac{2(8-5)}{3} = \frac{2\times 3}{2} = 2$$

2 Sabiendo que:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & b & \\ \hline a & & c \\ \hline\end{array} = \frac{a+b}{c} + 1$$

Halla:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 12 & \\ \hline 8 & & 2 \\ \hline\end{array}$$

Resolución:

Identificamos el operador matemático y su regla de operación.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & 12 & \\ \hline a & & c \\ \hline\end{array} = \frac{8+12}{2} + 1$$

$$= 10 + 1$$

$$= 11$$

3 Si: $a\%\,b = a^2 + b - 1$

Halla: $A = \sqrt[3]{(5\,\%\,6) - 3}$

Resolución:

Identificamos el operador matemático y su regla de operación.

$5\,\%\,6 = 5^2 + 6 - 1$

$\quad = 25 + 6 - 1 = 30$

$A = \sqrt[3]{(5\,\%\,6) - 3}$

$A = \sqrt[3]{30 - 3}$

$A = \sqrt[3]{27}$

$\therefore A = 3$

4 Si: $x \# y = \sqrt{x+y}$

Calcula el valor de E: $E = (9 \# 16) \# 11$

Resolución:

Identificamos el operador matemático y su regla de operación:

$E = (9 \times 16) \times 11$

$E = \left(\sqrt{9+16}\right) \times 11$

$E = \left(\sqrt{25}\right) \times 11$

$E = 5 \times 11$

$E = \sqrt{5+11}$

$E = \sqrt{16}$

$E = 4$

5 Se tiene que:

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \multicolumn{2}{c}{c} \end{array} = \sqrt{a+b+c}$$

Calcula:

$$\begin{array}{c|c} 15 & 18 \\ \multicolumn{2}{c}{16} \end{array} - \begin{array}{c|c} 7 & 10 \\ \multicolumn{2}{c}{8} \end{array}$$

Resolución:

Identificamos el operador matemático y su regla de operación:

$$\begin{array}{c|c} 15 & 18 \\ \multicolumn{2}{c}{16} \end{array} = \sqrt{15+18+16} = \sqrt{49} = 7$$

$$\begin{array}{c|c} 7 & 10 \\ \multicolumn{2}{c}{8} \end{array} = \sqrt{7+10+8} = \sqrt{25} = 5$$

Luego:

$$\begin{array}{c|c} 15 & 18 \\ \multicolumn{2}{c}{16} \end{array} - \begin{array}{c|c} 7 & 10 \\ \multicolumn{2}{c}{8} \end{array} = 7 - 5 = 2$$

6 Si: $P \heartsuit Q = 2P^2 - \sqrt{Q}$

Halla el valor de M: $M = \sqrt{19} \heartsuit (2 \heartsuit 16)$

Resolución:

Primero calculamos $(2 \heartsuit 16)$:

$2 \heartsuit 16 = 2(2^2) - \sqrt{16}$

$\quad = 2(4) - 4 = 8 - 4 = 4$

Luego, reemplazamos en M:

$M = \sqrt{19} \heartsuit (2 \heartsuit 16)$

$M = \sqrt{19} \heartsuit 4$

$M = 2(\sqrt{19})^2 - \sqrt{4}$

$M = 2(19) - 2$

$M = 38 - 2 = 36$

Actividades de razonamiento

1. Si: $a \ \theta \ b = 3b - 2a^2$
Calcula: $5 \ \theta \ 23$

A) 21 B) 22 C) 23 D) 20 E) 19

2. Sabiendo que:
$a \triangledown b = 5a - 7b + 2$
Calcula: $9 \triangledown 6$

A) 5 B) 7 C) 6 D) 4 E) 3

3. Si se cumple que:
$m \ \theta \ n = \frac{2m + n}{2} - 1$
Calcula: $7 \ \theta \ 4$

A) 12 B) 6 C) 8 D) 10 E) 7

4. Sabiendo que:
$a \% b = \frac{a + b}{2} + 3$
Calcula: $\frac{1}{5}(5 \% 9)$

A) 8 B) 2 C) 10 D) 6 E) 4

5. Si: $\triangle(x) = 5x - 3$
Calcula: $\triangle(3) + \triangle(2)$

A) 21 B) 17 C) 12 D) 19 E) 5

6. Si: $P \triangledown Q = 8P - 6Q$
Calcula: $R = 47 \triangledown 46$

A) 100 B) 60 C) 110 D) 80 E) 90

7. Si: $a \# b = a^2 + 1$
Halla: $(6 \# 66) + (5 \# 2)$

A) 70 B) 26 C) 58 D) 37 E) 63

8. Si: $a \% b = (2a - b)^3$
Halla: $A = (5 \% 9) + (4 \% 5)$

A) 27 B) 26 C) 20 D) 28 E) 24

9. Si se cumple que:

$m\ \Omega\ n = \dfrac{m+n}{m-n} + m + n$

Calcula: $9\ \Omega\ 6$

A) 15 B) 21 C) 20 D) 10 E) 18

10. Dados: $\boxed{x} = 6x - 7$

$\underset{}{\overset{}{\triangle}}\!\!\!\!x = 7x - 6$ (x dentro de un triángulo)

Halla:

$M = \overset{\triangle}{4} + \boxed{3}$

A) 33 B) 29 C) 35 D) 20 E) 30

11. Si se cumple que:

$x \oslash y = \dfrac{3x + 2y}{2}$

Calcula : $(4 \oslash 6) \oslash 2$

A) 38 B) 20 C) 25 D) 40 E) 30

12. Si se cumple que:

$a \# b = 7a + 3b$

$m \oslash n = 2mn - 5$

Calcula: $(1 \# 3)\ (1 \oslash 3)$

A) 16 B) 18 C) 20 D) 17 E) 15

13. Sabiendo que:

$m\ \psi\ n = m^2 - n$

Calcula: $(3\ \psi\ 5)\ \psi\ (4\ \psi\ 7)$

A) 7 B) 4 C) 18 D) 10 E) 22

14. Sabiendo que:

$\left(\dfrac{a}{2}\right) \Delta \left(\dfrac{b}{3}\right) = \sqrt{2ab}$

Calcula: $4 \Delta 3$

A) 13 B) 14 C) 12 D)11 E) 10

Claves

1. E	5. D	9. C	13. A
2. A	6. A	10. A	14. C
3. C	7. E	11. B	
4. B	8. D	12. A	

Reto



Si:

$\bigcirc\!\!\!\!\!n = 2 + 4 + 6 + ... + n$ (n dentro de un círculo)

$\boxed{m} = 1 + 2 + 3 + ... + m$

Calcula el valor de:

$\boxed{13} + 1$ (dentro de un círculo)

Rpta.: 2162

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Si:
$a * b = 2a + b - 3$
Calcula: $12 * 8$

A) 18 B) 24 C) 15 D) 29 E) 30

2. Si: $m \triangle n = mn - m$

Calcula: $6 \triangle 2$

A) 10 B) C) 6 D) 8 E) 12

3. Si: $\boxed{a} = a^2 - 1$

Halla: $\boxed{\sqrt{2}}$

A) $\sqrt{3}$ B) 1 C) 4 D) $\sqrt{2}$ E) 2

4. Si: $a@b = \sqrt{a} + \sqrt{a+b}$

Calcula: 4@21

A) 5 B) 9 C) 8 D) 10 E) 7

5. Si: $m \nabla n = m^n + n^m$

Calcula: $2 \nabla 3$

A) 17 B) 8 C) 10 D) 14 E) 12

6. Si:
$\overset{\triangle}{a} = a^2 - a$
$\textcircled{b} = b - b^2$

Halla: $\overset{\triangle}{4} - \textcircled{3}$

A) 14 B) 22 C) 20 D) 18 E) 16

7. Si: $P \% R = (2P - R)^3$

Halla: $E = (5 \% 9) + (4 \% 5)$

A) 17 B) 18 C) 28 D) 15 E) 25

8. Si: $m \,\theta\, n = \dfrac{m+n}{2}$

Halla: $R = \sqrt{6 \,\theta\, 2} + \sqrt{7 \,\theta\, 11}$

A) 7 B) 10 C) 13 D) 5 E) 9

9. Si: $\overset{\triangle}{x} = x^2 - 4$

Halla: $\overset{\triangle}{\overset{\triangle}{3}}$

A) 12 B) 21 C) 30 D) 15 E) 17

NIVEL 2

10. Si se cumple:

$m \,\theta\, n = \dfrac{2m+n}{2} - 1$

Calcula: $7 \,\theta\, 4$

A) 10 B) 5 C) 8 D) 9 E) 7

11. Si se sabe que:

$m\ @\ n = \dfrac{m+2n}{m-n}$

Calcula: (3 @ 2) @4

A) 5 B) 6 C) 8 D) 4 E) 7

12. Si se cumple:

$x \oslash y = \dfrac{3x+2y}{2}$

Calcula: $(4 \oslash 6) \oslash 2$

A) 15 B) 18 C) 27 D) 20 E) 25

13. Si se cumple:

$\triangle\!\!x = x^2 - x^3$

Halla: $\triangle\!\!\triangle\!\!2$

A) 40 B) 70 C) 60 D) 50 E) 80

14. Si:

$a\ \alpha\ b = 5a - 7b$

Halla: $(4\ \alpha\ 2)\ \alpha\ (6\ \alpha\ 4)$

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

15. Si:

$a \triangledown b = a^2 + 2b - ab$

Calcula: $(3 \triangledown 2) \triangledown (2 \triangledown 3)$

A) 28 B) 29 C) 26 D) 30 E) 60

16. Si: $a\ \alpha\ b = a^2 - 2b$

Halla: $(3\sqrt{2}\ \alpha\ 4)\ \alpha\ 3$

A) 96 B) 95 C) 93 D) 94 E) 91

17. Si:

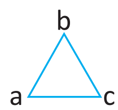
$\triangle x = 2x - 3$

$\text{ⓧ} = 3x + 1$

Calcula: $S = \sqrt{\triangle 8 + \text{④} - 1}$

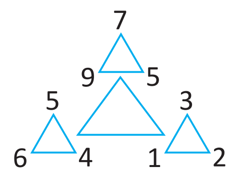
A) 5 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

18. Se define:



$= b^2 - ac$

Calcula:



A) 10 B) 11 C) 13 D) 9 E) 12

NIVEL 3

19. Si se cumple:

$a \# b = 7a + 3b$

$m \oslash n = 2mn - 5$

Calcula: $(1 \# 3)(1 \oslash 3)$

A) 10 B) 12 C) 16 D) 8 E) 14

20. Sabiendo que:

$a \triangledown b = 2a + 3b - 5$

$a \% b = a^2 - 2b + 1$

Calcula: $\dfrac{(2 \triangledown 4) + 1}{3 \% 2}$

A) 6 B) 5 C) 2 D) 7 E) 4

21 Sabiendo que:

$\boxed{x} = \sqrt{x} + x^2$

$ⓧ = \frac{x}{3} - 5$

Halla: $\boxed{4}$ (encerrado en círculo)

A) 5 B) 2 C) 3 D) 4 E) 1

22 Si se cumple que:

$m * n = \frac{m + n + m.n}{2}$

$m \phi n = \frac{2m + 3n}{5}$

Calcula: $\frac{(4 * 6) - 1}{7 \phi 2}$

A) 7 B) 8 C) 10 D) 4 E) 9

23 Si: $a \triangle b = a^2 - b^2$

Calcula la suma de cifras del resultado de:

$5444 \triangle 5443$

A) 20 B) 23 C) 24 D) 27 E) 28

24 Si: $a \# b = a^2 - b^2 + 1$

Calcula:

$S = 4 . \left[\frac{(-3)\#(-2)}{(-4)\#(-3)}\right]$

A) 1 B) 3 C) 2 D) 6 E) 10

25 Si:

$\boxed{x} = x^2 - 1$

$ⓧ = x^2 + 1$

Calcula: $F = \sqrt{\boxed{③} + 1}$

A) 12 B) 14 C) 15 D) 13 E) 10

26 Si: $\boxed{x} = x^2 - x + 1$

Calcula: $S = \sqrt[3]{\boxed{4} - \sqrt{25}}$

A) 4 B) 3 C) 1 D) 0 E) 2

27 Dado: $a^{\#b} = \frac{a + b}{a - b}$

Calcula: $E = 8^{\#7} + 10^{\#9}$

A) 34 B) 30 C) 21 D) 48 E) 39

Claves

NIVEL 1	8. D	15. B	22. D
1. D	9. B	16. D	23. C
2. C	NIVEL 2	17. A	24. B
3. B	10. C	18. D	25. E
4. E	11. A	NIVEL 3	26. E
5. A	12. D	19. C	27. A
6. D	13. E	20. C	
7. C	14. A	21. E	

Conteo de figuras

NOCIONES PREVIAS

Una figura puede ser simple o compuesta.

Figura simple

No contiene otras figuras en su interior.
Ejemplos:

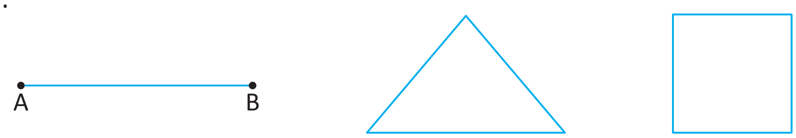
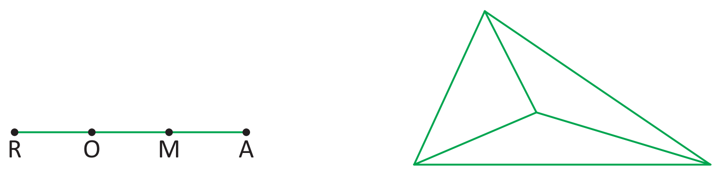


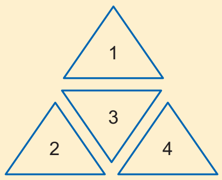
Figura compuesta

Contiene otras figuras en su interior.
Ejemplos:



Atención

Los triángulos simples son aquellos que se presentan en forma individual.





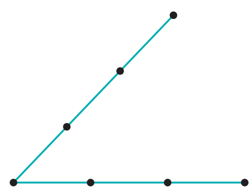
MÉTODOS DE CONTEO DE FIGURAS

Método de conteo directo

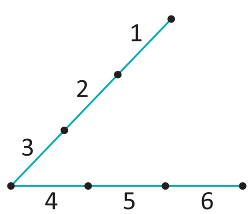
El conteo directo se realiza visualmente o por simple inspección y enumerando las figuras simples que conforman la figura principal, en este caso se dice que estamos contando por combinación.

Ejemplos:

1. ¿Cuántos segmentos hay en la figura?



Resolución:



Con 1 número:	1, 2, 3, 4, 5, 6	:	6
Con 2 números:	12, 23, 45, 56	:	4
Con 3 números:	123, 456	:	2
			12

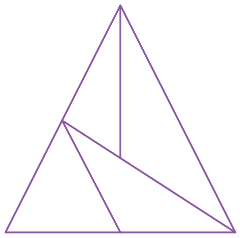
Entonces, en total hay 12 segmentos.

Importante

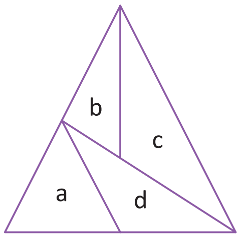
El contar figuras, resulta ser un procedimiento sencillo en la medida que este conteo se realice en forma ordenada, y para ello debemos indicar las figuras que se desean contar con números o letras.



2. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



Resolución:



Con 1 letra:	a, b, c, d	: 4
con 2 letras:	bc, ad	: 2
con 3 letras:		: 0
con 4 letras:	abcd	: 1
		7

Por lo tanto, en total hay 7 triángulos.

Recuerda

Los números o letras asignados pueden estar ubicados indistintamente en cualquier figura que cumpla con la condición indicada, aquí lo más importante es cómo se efectúa el conteo.



Método por inducción

Sólo para algunos tipos de figuras se utilizan relaciones matemáticas.

Número de segmentos (NS)



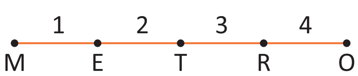
$$NS = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo:

Halla el número total de segmentos.



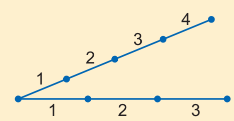
Resolución:



$$NS = \frac{4(4+1)}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

Atención

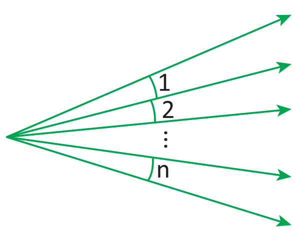
Calcula el número de segmentos en:



$$NS = \frac{4(5)}{2} + \frac{3(4)}{2} = 16$$



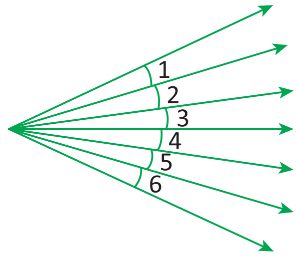
Número de ángulos (NA)



$$NA = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo:

Halla el número total de ángulos.

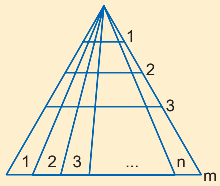


Resolución:

$$NA = \frac{6(6+1)}{2} = \frac{6 \times 7}{2} = 21$$



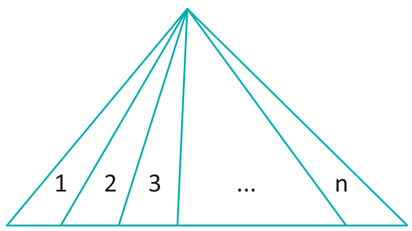
Atención



$$NT = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]m$$

m: n.º de rectas

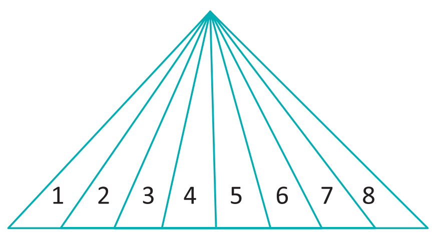
Número de triángulos (NT)



$$NT = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo:

Halla el número total de triángulos.



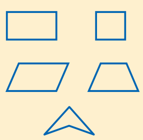
Resolución:

$$NT = \frac{8(8+1)}{2} = \frac{8 \times 9}{2} = 36$$

Recuerda

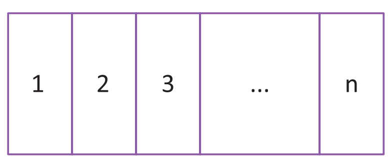
Un cuadrilátero es una figura geométrica de cuatro lados.

Ejemplos:





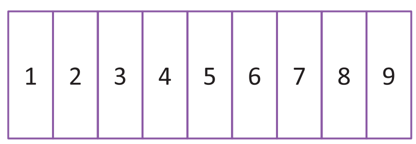
Número de cuadriláteros (NC)



$$NC = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo:

Halla el número total de cuadriláteros.

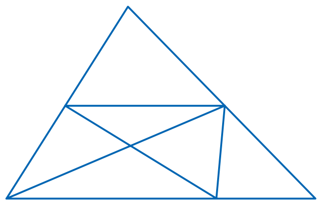


Resolución:

$$NC = \frac{9(9+1)}{2} = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

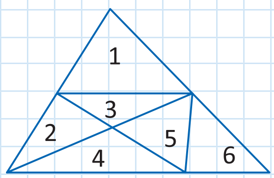
Problemas resueltos

1 ¿Cuántos triángulos se ven en la siguiente figura?



Resolución:

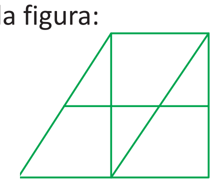
Asignando números a cada región:



Con 1 número : 1, 2, 3, 4, 5, 6 : 6 Δs
Con 2 números : 23, 45, 24, 35 : 4 Δs
Con 3 números : 123, 456 : 2 Δs
Con 6 números : 123456 : 1 Δs

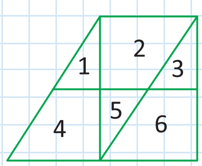
13 Δs

2 Indica el número total de cuadriláteros que se pueden contar en la figura:



Resolución:

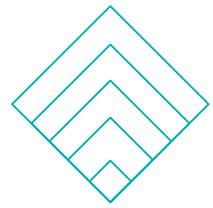
Asignamos números a cada región simple:



Con 1 número : 2, 4, 6 : 3 $\square$s
Con 2 números : 12, 23, 45, 56: 4 $\square$s
Con 3 números : 123, 456 : 2 $\square$s
Con 4 números : 1245, 2356 : 2 $\square$s
Con 6 números : 123456 : 1 $\square$s

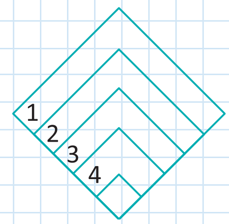
12 $\square$s

3 ¿Cuántos hexágonos hay en la siguiente figura?



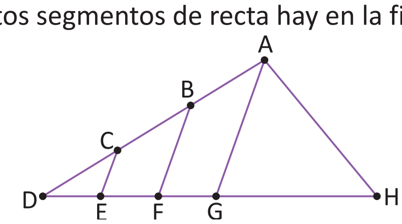
Resolución:

Asignamos un número a cada región hexagonal:



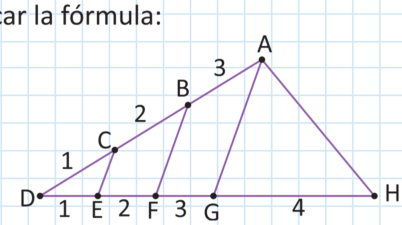
Número de hexágonos $= \dfrac{4 \times 5}{2} = 10$

4 ¿Cuántos segmentos de recta hay en la figura?



Resolución:

Asignamos números a cada segmento para aplicar la fórmula:



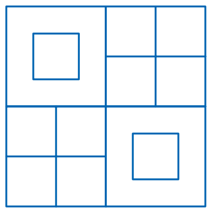
Número de segmentos en $\overline{AD} = \dfrac{3(4)}{2} = 6$

Número de segmentos en $\overline{DH} = \dfrac{4(5)}{2} = 10$

Número de segmentos simples = CE, BF, AG, AH: 4

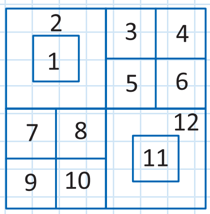
$\therefore$ Número total de segmentos $= 6 + 10 + 4 = 20$

5 ¿Cuántos cuadrados hay en la siguiente figura?



Resolución:

Asignamos números a cada región simple:

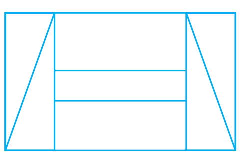


Contamos los cuadrados:

Con 1 número : 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11: 10 □s
Con 2 números : 12 ,1112 : 2 □s
Con 4 números : 3456, 78910 : 2 □s
Con 12 números : 123456789101112 : 1 □s

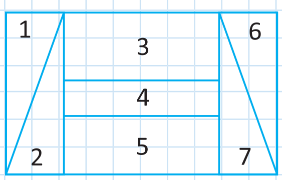
15 □s

6 De acuerdo a la figura mostrada:
T = Número de triángulos
C = Número de cuadriláteros
Calcula: T + C



Resolución:

Asignando un número a cada región.



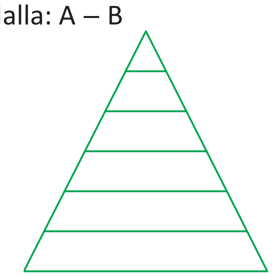
Contamos los cuadriláteros:

Con 1 número : 3, 4, 5 : 3
Con 2 números : 34, 45, 12, 67 : 4
Con 3 números : 345 : 1
Con 4 números : 2345, 3457 : 2
Con 5 números : 12345, 34567, 23457: 3
Con 6 números : 123457, 234567 : 2
Con 7 números : 1234567 : 1

C = 3 + 4 + 1+ 2 + 3 + 2 + 1 = 16

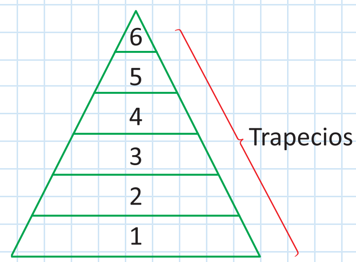
Contamos los triángulos:
Con 1 número: 1, 2, 6 , 7 : 4
T = 4
∴ T + C = 4 + 16 = 20

7 De la figura mostrada, A representa el número total de trapecios y B representa el número total de triángulos. Halla: A – B



Resolución:

Asignamos un número a cada región:



Calculamos el número de trapecios:

Número de trapecios $= \frac{5(6)}{2} = 15$

Luego: A = 15

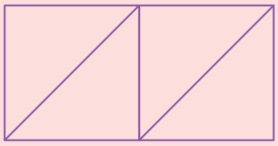
Calculamos el número de triángulos:

Con 1 número : 6 : 1△
Con 2 números: 56 : 1△
Con 3 números: 456 : 1△
Con 4 números: 3456 : 1△
Con 5 números: 23456 : 1△
Con 6 números: 123456 : 1△

Luego: B = 6(1) = 6
∴ A – B = 15 – 6 = 9

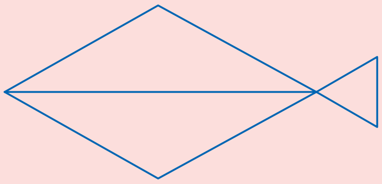
Actividades de razonamiento

1. ¿Cuántos cuadriláteros hay?



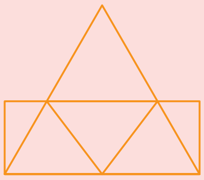
A) 5　　B) 4　　C) 2　　D) 6　　E) 3

2. ¿Cuántos segmentos hay?



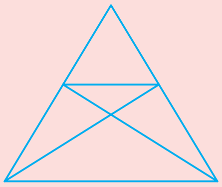
A) 9　　B) 10　　C) 11　　D) 8　　E) 7

3. ¿Cuántos triángulos hay?



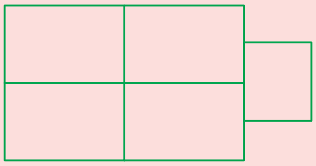
A) 6　　B) 4　　C) 5　　D) 8　　E) 7

4. ¿Cuántos triángulos hay?



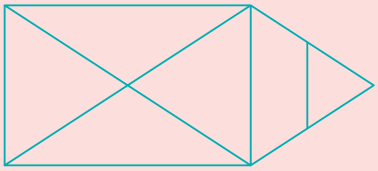
A) 12　　B) 11　　C) 9　　D) 10　　E) 8

5. ¿Cuántos cuadriláteros hay?



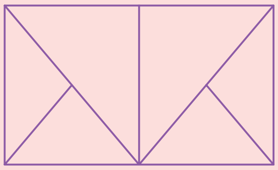
A) 13　　B) 10　　C) 8　　D) 5　　E) 7

6. ¿Cuántos triángulos hay?



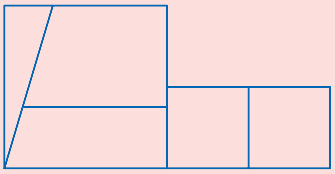
A) 10　　B) 9　　C) 11　　D) 12　　E) 8

7. Halla el total de triángulos que hay en la siguiente figura:



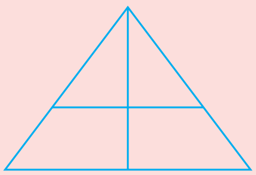
A) 8　　B) 9　　C) 10　　D) 7　　E) 11

8. ¿Cuántos cuadriláteros hay?



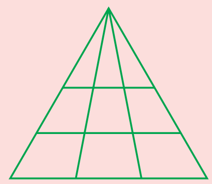
A) 7　　B) 6　　C) 5　　D) 9　　E) 3

9. Halla la suma del número de cuadriláteros y el número de triángulos.



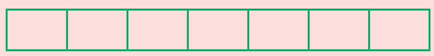
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

10. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



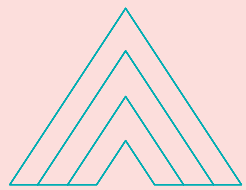
A) 18 B) 22 C) 21 D) 20 E) 15

11. ¿Cuántos segmentos hay?



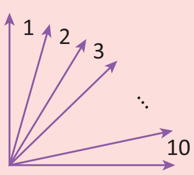
A) 62 B) 64 C) 56 D) 66 E) 60

12. ¿Cuántos hexágonos hay?



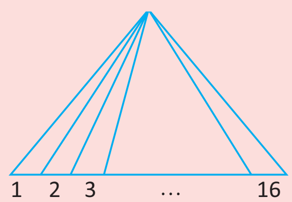
A) 6 B) 3 C) 2 D) 1 E) 4

13. ¿Cuántos ángulos hay en la siguiente figura?



A) 50 B) 60 C) 55 D) 40 E) 68

14. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



A) 120 B) 136 C) 108 D) 90 E) 900

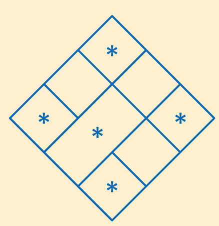
Claves

1. D	5. B	9. A	13. C
2. B	6. A	10. A	14. B
3. E	7. B	11. B	
4. A	8. A	12. A	

Reto



¿Cuántos cuadriláteros existen en cuyo interior se encuentra un asterisco?

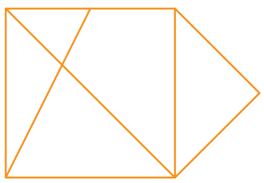


Rpta.: 12

Refuerza practicando

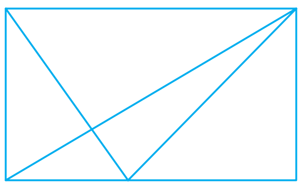
NIVEL 1

1. Halla el total de triángulos.



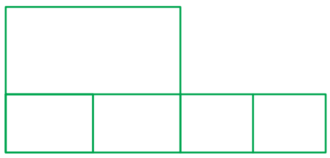
A) 7
B) 8
C) 10
D) 6
E) 11

2. Halla el total de triángulos.



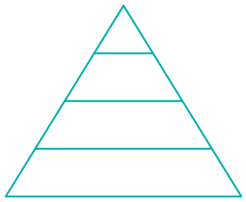
A) 12
B) 10
C) 16
D) 11
E) 14

3. Halla el total de cuadriláteros.



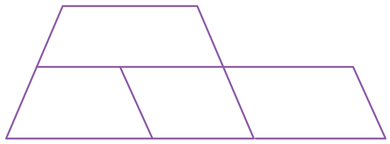
A) 12
B) 10
C) 13
D) 14
E) 15

4. Halla el total de triángulos.



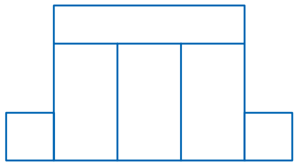
A) 6
B) 7
C) 8
D) 4
E) 5

5. Halla el total de cuadriláteros.



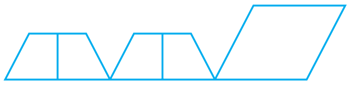
A) 7
B) 8
C) 9
D) 6
E) 5

6. Halla el total de cuadriláteros.



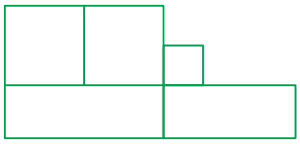
A) 9
B) 10
C) 11
D) 12
E) 13

7. Halla el total de cuadriláteros.



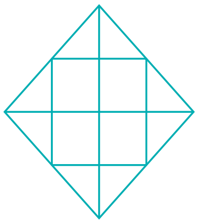
A) 5 B) 6 C) 8 D) 7 E) 4

8. Halla el total de cuadriláteros.



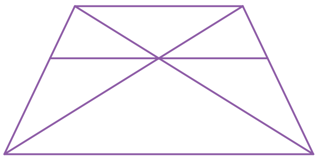
A) 7 B) 8 C) 9 D) 6 E) 5

9) ¿Cuántos triángulos existen en la siguiente figura?



A) 20
B) 42
C) 44
D) 60
E) 64

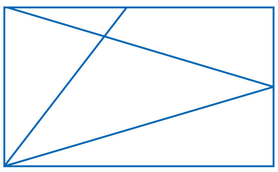
10) Halla el total de triángulos.



A) 7
B) 6
C) 5
D) 9
E) 12

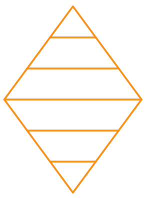
NIVEL 2

11) Halla el total de triángulos.



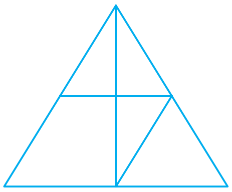
A) 10
B) 12
C) 13
D) 7
E) 9

12) Halla el total de triángulos.



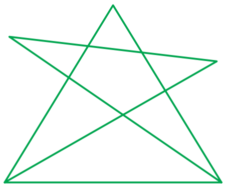
A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

13) Halla el total de triángulos.



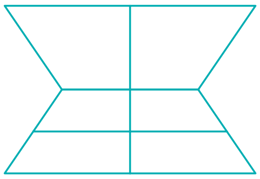
A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12

14) Halla el total de triángulos.



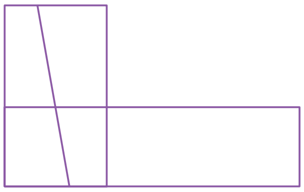
A) 12
B) 15
C) 16
D) 11
E) 14

15) Halla el total de cuadriláteros.



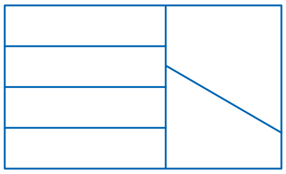
A) 11
B) 10
C) 12
D) 13
E) 14

16) Halla el total de cuadriláteros.



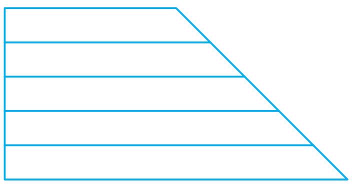
A) 12
B) 10
C) 11
D) 9
E) 7

17. Halla el total de cuadriláteros.



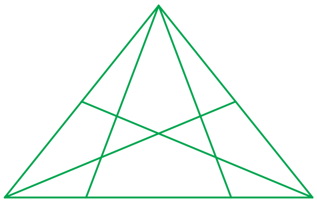
A) 11
B) 8
C) 16
D) 14
E) 13

18. Halla el total de cuadriláteros.



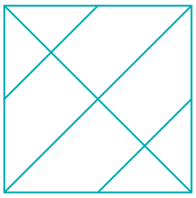
A) 16
B) 14
C) 18
D) 12
E) 15

19. ¿Cuántos triángulos existen en el siguiente gráfico?



A) 20
B) 24
C) 29
D) 26
E) 27

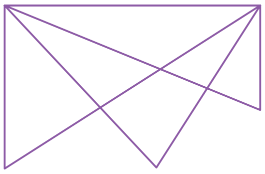
20. ¿Cuántos triángulos existen en el gráfico siguiente?



A) 9
B) 10
C) 11
D) 12
E) 14

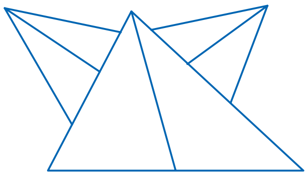
NIVEL 3

21. Halla el total de triángulos.



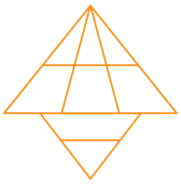
A) 12
B) 13
C) 14
D) 15
E) 16

22. Halla el total de triángulos.



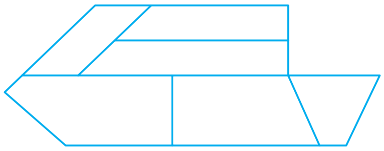
A) 9
B) 8
C) 7
D) 12
E) 14

23. Halla el total de triángulos.



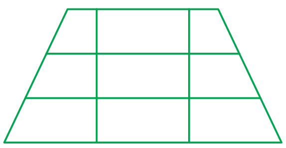
A) 18
B) 13
C) 16
D) 14
E) 12

24. Halla el total de cuadriláteros.



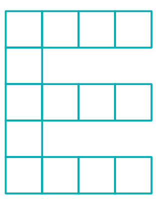
A) 11
B) 10
C) 8
D) 13
E) 14

25 Halla el total de cuadriláteros.



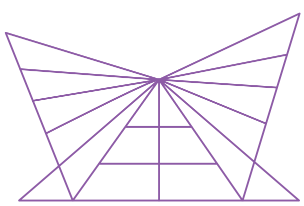
A) 32
B) 36
C) 38
D) 30
E) 28

26 El número de cuadriláteros que existen en la figura adjunta es:



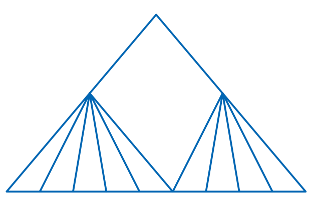
A) 42
B) 45
C) 57
D) 64
E) 54

27 ¿Cuántos triángulos existen en el siguiente gráfico?



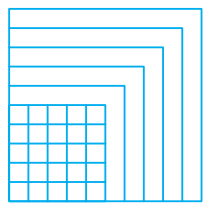
A) 40
B) 42
C) 48
D) 44
E) 46

28 ¿Cuántos triángulos existen en la siguiente figura?



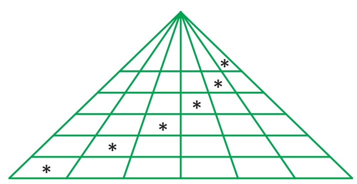
A) 18
B) 24
C) 26
D) 45
E) 43

29 ¿Cuántos cuadrados existen en el siguiente gráfico?



A) 30
B) 40
C) 50
D) 60
E) 65

30 ¿Cuántos triángulos tienen por lo menos un asterisco en su interior?



A) 90
B) 91
C) 92
D) 93
E) 94

Claves

NIVEL 1
1. A
2. B
3. A
4. D
5. B
6. B
7. D
8. B
9. A
10. E

NIVEL 2
11. D
12. B
13. B
14. E
15. C
16. A
17. D
18. E
19. C
20. E

NIVEL 3
21. C
22. A
23. D
24. C
25. B
26. A
27. C
28. C
29. D
30. B

Fracciones

DEFINICIÓN

Se denomina así a todos los números de la forma $\frac{a}{b}$ que cumplen las siguientes condiciones:

Fracción: $\frac{a}{b}$ → a: Numerador; b: Denominador

Donde:
a y b $\in \mathbb{Z}^+$
$a \neq \overset{\circ}{b}$

Representación gráfica de una fracción

Para representar gráficamente a una fracción, consideremos lo siguiente:

F: $\frac{a}{b}$
- a → Número de partes iguales que se consideran.
- b → Número de partes iguales en que se divide la unidad.

Ejemplo:

3 partes iguales

F: $\frac{3}{5}$

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

5 partes iguales

Recuerda

Todas las fracciones se pueden expresar gráficamente.

$\frac{2}{5}$: | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

$\frac{4}{3}$: | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{3}$ | | |



PRINCIPALES TIPOS DE FRACCIONES

Por la comparación de sus términos

Fracción propia

Una fracción es propia cuando el numerador es menor que el denominador. Al hacer la división correspondiente, el resultado es menor que la unidad.

Ejemplos:

$\frac{5}{9}, \frac{3}{11}, \frac{1}{20}, \frac{8}{13}$

Fracción impropia

Una fracción es impropia cuando el numerador es mayor que el denominador. Al hacer la división correspondiente, el resultado es mayor que la unidad.

Ejemplos:

$\frac{3}{2}, \frac{41}{40}, \frac{110}{100}, \frac{432}{123}$

Nota

¿Cuántas fracciones propias existen cuyo denominador sea 24?

Sea: $f = \frac{N}{24}$

Como es propia, entonces:

$\frac{N}{24} < 1 \Rightarrow N < 24$

Luego $N \in \{1; 2; 3; ...; 23\}$

$\therefore$ Existen 23 fracciones.

Por su denominador

Ordinarios o comunes

Cuando su denominador es diferente de una potencia de 10.

Ejemplos:

$\frac{3}{8}, \frac{11}{15}, \frac{31}{50}, \frac{15}{9}, \frac{4}{26}, \frac{7}{18}$

Decimal

Cuando su denominador es igual a una potencia de 10.

Ejemplos:

$\frac{7}{10}, \frac{15}{100}, \frac{35}{1000}, \frac{35}{1000}, \frac{876}{10\,000}$

Observación

Considerando un conjunto de fracciones homogéneas, será mayor aquella fracción que tenga mayor numerador.
Ejemplo:

$\frac{7}{15}, \frac{11}{15}, \frac{8}{15}, \frac{4}{15}$

La fracción mayor es: $\frac{11}{15}$



Por el grupo de fracciones

Fracciones homogéneas

Es un conjunto de fracciones que tienen igual denominador.

Ejemplos:

- $\frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{101}{7}$
- $\frac{5}{19}, \frac{9}{19}, \frac{23}{19}, \frac{18}{19}$

Fracciones heterogéneas

Es un conjunto de fracciones que tienen diferente denominador.

Ejemplos:

- $\frac{3}{5}, \frac{4}{9}, \frac{2}{8}, \frac{4}{10}$
- $\frac{14}{3}, \frac{7}{8}, \frac{9}{13}, \frac{6}{15}$

Por los divisores comunes entre sus términos

Fracción reductible

Su numerador y denominador poseen factores en común.

Ejemplos:

$\frac{3}{6}, \frac{20}{18}, \frac{100}{10002}, \frac{6}{10}$

Fracción irreductible

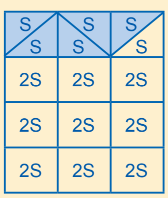
Su numerador y denominador no poseen factores en común.

Ejemplos:

$\frac{3}{5}, \frac{7}{2}, \frac{4}{9}, \frac{21}{101}$

Importante

¿Qué fracción representa la parte sombreada?



$\frac{5S}{24S} = \frac{5}{24}$



RELACIÓN PARTE TODO

Es la razón geométrica de una cantidad asumida como parte, respecto a otra cantidad asumida como un todo.

F: $\frac{a}{b}$
- a → lo que hace de parte → es, son, representa
- b → lo que hace de todo → de, del, respecto

Ejemplos:

¿Qué parte de 30 es 6?

$\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

¿Qué parte de 90 es 20?

$\frac{20}{90} = \frac{2}{9}$

¿Qué parte de 80 es 120?

$$\frac{120}{80} = \frac{3}{2}$$

¿Qué parte representa 32 respecto de 256?

$$\frac{32}{256} = \frac{1}{8}$$

FRACCIÓN GENERATRIZ

Fracción: $\frac{a}{b}$ = Número decimal → Exacto / Periódico puro / Periódico mixto

Casos:

Decimal exacto

$$0,\underbrace{abc...x}_{\text{n cifras}} = \frac{\overline{abc...x}}{1\underbrace{00...00}_{\text{n cifras}}}$$

Ejemplos:

$0,7 = \frac{7}{10}$ $\quad 0,28 = \frac{28}{100}$ $\quad 5,4728 = \frac{54\,728}{10\,000}$

$0,375 = \frac{375}{1000}$ $\quad 6,29 = \frac{629}{100}$ $\quad 0,08 = \frac{8}{100}$

Atención

Para calcular la generatriz de un número decimal exacto se pone por numerador el número decimal, prescindiendo de la coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya.



Decimal periódico puro

$$0,\underbrace{\overset{\frown}{abc...x}}_{\text{n cifras}} = \frac{\overline{abc...x}}{\underbrace{999...99}_{\text{n cifras}}}$$

Ejemplos:

$0,\overset{\frown}{6} = \frac{6}{9}$ $\quad 0,\overset{\frown}{819} = \frac{819}{999}$

$0,\overset{\frown}{72} = \frac{72}{99}$ $\quad 3,\overset{\frown}{27} = 3 + 0,\overset{\frown}{27} = 3 + \frac{27}{99}$

Nota

Para calcular la generatriz de un número decimal periódico puro, se pone por numerador un periodo y por denominador tantos nueves como cifras tenga el período.

Decimal periódico mixto

$$0,\underbrace{\overline{abc...m}}_{\text{x cifras}}\underbrace{\overset{\frown}{n...w}}_{\text{y cifras}} = \frac{\overline{abc...mn...w} - \overline{ab...m}}{\underbrace{99...9}_{\text{y cifras}}\underbrace{00..0}_{\text{x cifras}}}$$

Ejemplos:

$0,1\overset{\frown}{8} = \frac{18-1}{90}$ $\quad 0,24\overset{\frown}{31} = \frac{2431-24}{9900}$

$8,2\overset{\frown}{71} = 8 + 0,2\overset{\frown}{71} = 8 + \frac{271-2}{990}$ $\quad 0,35\overset{\frown}{9} = \frac{359-35}{900}$



Atención

Para calcular la generatriz de un número decimal periódico mixto, se pone por numerador, la parte no periódica seguida de un período, menos la parte no periódica, y por denominador tantos nueves como cifras tenga el período y tantos ceros como cifras decimales tenga la parte no periódica.

Problemas resueltos

1 Encuentra el valor de E si:

$$E=\frac{6\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}}{3\frac{1}{6}-2\frac{1}{3}}$$

Resolución:

$$E=\frac{6\frac{1}{2}+4\frac{3}{4}}{3\frac{1}{6}-2\frac{1}{3}}=\frac{\frac{13}{2}+\frac{19}{4}}{\frac{19}{6}-\frac{7}{3}}$$

Homogenizando denominadores:

$$E=\frac{\frac{13\times 2}{2\times 2}+\frac{19}{4}}{\frac{19}{6}-\frac{7\times 2}{3\times 2}}=\frac{\frac{26}{4}+\frac{19}{4}}{\frac{19}{6}-\frac{14}{6}}$$

Luego:

$$E=\frac{\frac{45}{4}}{\frac{5}{6}}\Rightarrow E=\frac{45\times 6}{4\times 5}$$

$$\therefore\ E=\frac{27}{2}$$

2 ¿Cuánto le sobra a $\frac{7}{8}$ para ser igual a la diferencia de $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{8}$?

Resolución:

Sea x la cantidad que le sobra a $\frac{7}{8}$.

Entonces a $\frac{7}{8}$ se le debe quitar x para que sea igual a la diferencia de $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{8}$.

Luego: $\frac{7}{8}-x=\frac{2}{5}-\frac{3}{8}$

$$\frac{7}{8}-x=\frac{1}{40}$$

$$x=\frac{7}{8}-\frac{1}{40}$$

Homogenizamos denominadores:

$$x=\frac{7\times 5}{8\times 5}-\frac{1}{40}=\frac{35}{40}-\frac{1}{40}=\frac{34}{40}$$

$$\therefore\ x=\frac{17}{20}$$

3 Si: $a=\cfrac{6}{1-\cfrac{2}{1-\cfrac{3}{1-\cfrac{1}{4}}}}$

Entonces el valor de "a" es:

Resolución:

Este tipo de problemas se desarrollan de abajo hacia arriba, veamos:

$$a=\cfrac{6}{1-\cfrac{2}{1-\cfrac{3}{1-\cfrac{1}{4}}}}\quad \left(1-\tfrac{1}{4}\to\tfrac{3}{4}\right)\qquad \Rightarrow a=\cfrac{6}{1-\cfrac{2}{1-\cfrac{3}{\frac{3}{4}}}}\quad \left(\tfrac{3}{\frac{3}{4}}\to 4\right)$$

$$a=\frac{6}{1-\frac{2}{1-4}}=\frac{6}{1-\frac{2}{-3}}=\frac{6}{1+\frac{2}{3}}=\frac{6}{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore\ a=\frac{18}{5}$$

4 Teresa gasta su dinero de la siguiente manera: el lunes los 3/4 de su dinero, el miércoles gasta los 2/5 de lo que le queda, el viernes gasta 1/3 de lo que le queda, el viernes gasta 1/3 de lo que le queda el miércoles, y el domingo gasta los 3/7 del nuevo resto, quedándose al final con 5/8. ¿Cuánto dinero tenía al inicio?

Resolución:

Sea x la cantidad de dinero al inicio.

Del enunciado:

Lunes: gasta $\frac{3}{4}x$; queda $\frac{1}{4}x$

Miércoles: gasta $\frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}x\right)$; queda $\frac{3}{5}\left(\frac{1}{4}x\right)$

Viernes: gasta $\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\left(\frac{1}{4}x\right)\right)$; queda $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\left(\frac{1}{4}x\right)\right)$

Domingo: gasta $\frac{3}{7}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\left(\frac{1}{4}x\right)\right)\right)$

queda $\frac{4}{7}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\left(\frac{1}{4}x\right)\right)\right)$

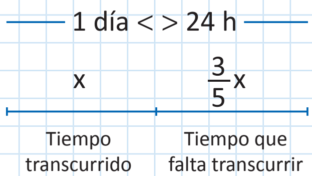
Por dato: $\frac{4}{7}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\left(\frac{1}{4}x\right)\right)\right)=8\Rightarrow x=140$

$\therefore$ Tenía al inicio S/. 140.

5 ¿Qué hora es, si lo que falta del día es los 3/5 del tiempo transcurrido?

Resolución:

Sea x el tiempo transcurrido.
Entonces el tiempo que falta transcurrir será $\frac{3}{5}$x:



Del gráfico: $x + \frac{3}{5}x = 24$

$\frac{8}{5}x = 24 \Rightarrow x = 15\text{ h}$

∴ Son las 3:00 p. m.

6 ¿Cuál es la fracción cuyo valor es menor que 2/5, pero mayor que 1/3 si se sabe que su denominador es 30?

Resolución:

Sea $f = \frac{N}{30}$ la fracción.

Según el enunciado: $\frac{1}{3} < \frac{N}{30} < \frac{2}{5}$

Homogenizamos denominadores:

$\frac{1 \times 10}{3 \times 10} < \frac{N}{30} < \frac{2 \times 6}{5 \times 6} \Rightarrow \frac{10}{30} < \frac{N}{30} < \frac{12}{30}$

Luego: N = 11

$\therefore f = \frac{11}{30}$

7 Un saco de arroz pesa los 5/9 de 18 kg más 2/3 de su peso. ¿Cuánto pesa el saco de arroz en kilogramos?

Resolución:

Sea x el peso del saco de arroz.
Según el enunciado:

$x = \frac{5}{9}(18) + \frac{2}{3}x$

$\frac{1}{3}x = 10 \Rightarrow x = 30$

∴ El saco de arroz pesa 30 kg.

8 Si: $L = (0,\widehat{3})(0,\widehat{3})(0,03)$

$M = \sqrt[5]{0,00243}$

Da como respuesta: L / M

Resolución:

De los datos:

$L = (0,\widehat{3})(0,\widehat{3})(0,03) = \frac{3}{9} \times \frac{3}{9} \times \frac{3}{100} = \frac{1}{300}$

$M = \sqrt[5]{0,00243} = \sqrt[5]{\frac{243}{100000}} = \sqrt[5]{\frac{3^5}{10^5}} = \frac{3}{10}$

Luego: $\frac{L}{M} = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{3}{10}}$

$\therefore \frac{L}{M} = \frac{1}{90}$

9 Si: $0,\widehat{a1} + 0,\widehat{a2} + 0,\widehat{a3} = \frac{14}{11}$

Halla el valor de a.

Resolución:

Del dato: $0,\widehat{a1} + 0,\widehat{a2} + 0,\widehat{a3} = \frac{14}{11}$

$\frac{\overline{a1}}{99} + \frac{\overline{a2}}{99} + \frac{\overline{a3}}{99} = \frac{14}{11}$

$\frac{\overline{a1} + \overline{a2} + \overline{a3}}{99} = \frac{14}{11}$

$\overline{a1} + \overline{a2} + \overline{a3} = 126$

$\therefore a = 4$

10 ¿Qué parte de $3\frac{1}{3}$ es lo que le falta a 2/7 para ser igual a 2/3 de 1/2?

Resolución:

Sea x lo que le falta a 2/7 para ser igual a 2/3 de 1/2.

Entonces: $\frac{2}{7} + x = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{2}{7} + x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{21}$

Veamos ahora qué parte de $3\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{21}$:

$\frac{\frac{1}{21}}{3\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{10}{3}} = \frac{1}{70}$

Actividades de razonamiento

1. Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $0{,}66 > 0{,}\widehat{6}$ ( )

II. $\frac{91}{\sqrt{49}}$ es una fracción irreductible. ( )

III. La generatriz de $0{,}2\widehat{4}$ es $\frac{11}{45}$. ( )

A) FFF B) VVF C) VFF D) FFV E) VFV

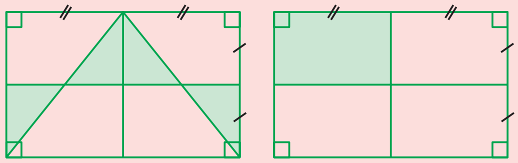
2. Si:

$A = \frac{1}{2} - 0{,}\widehat{3} \wedge B = 2 + \frac{1}{6}$

Halla el denominador de la fracción $\left(\frac{A}{B}\right)$.

A) 10 B) 13 C) 11 D) 12 E) 15

3. ¿Qué parte del área total, representa el área de la región sombreada?



A) $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{5}; \frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{5}; \frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{7}; \frac{1}{4}$

4. Halla: M

$M = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}$

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{9}{5}$ E) $\frac{4}{9}$

5. Una caja contiene 60 bombones, si Ana se comió 1/ 2 de ellos y Luis 1/4, ¿cuántos bombones quedan en la caja?

A) 30 B) 20 C) 45 D) 25 E) 15

6. Elena se va de compras con 200 soles. Si gasta 3/5 en zapatos y 1/8 en alimentos, ¿cuánto de vuelto le queda?

A) S/. 120 B) S/. 35 C) S/. 55
D) S/. 150 E) S/. 25

7. Efectúa:

$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \div \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}\right)$

A) $\frac{65}{32}$ B) $\frac{32}{47}$ C) $\frac{65}{72}$ D) $\frac{59}{43}$ E) $\frac{35}{23}$

8. Efectúa, y da como respuesta el numerador de la siguiente expresión:

$P = 0{,}3\widehat{2} + 0{,}\widehat{3} + 0{,}33$

A) 900 B) 887 C) 778
D) 746 E) 579

9. ¿Cuántos tercios hay en 4 unidades?

A) 12 B) 8 C) 15 D) 10 E) 14

10. Halla los $\frac{3}{2}$ de los $\frac{5}{8}$ de los $\frac{4}{9}$ de 288.

A) 122 B) 120 C) 119 D) 118 E) 116

11. Karen tiene tanto dinero como S/.75 más los 3/8 de su dinero. ¿Cuánto dinero tiene Karen?

A) S/.105 B) S/.120 C) S/.110
D) S/.100 E) S/.125

12. Una madre de familia ahorra durante una semana la sexta parte de S/.426. Si en una reunión familiar gastó un tercio de S/.45, ¿cuánto le quedó?

A) S/.52 B) S/.53 C) S/.54 D) S/.56 E) S/.55

13. $L = 0,\widehat{2} + 0,\widehat{3} + 0,\widehat{4} + ... + 0,\widehat{8}$

A) $3,\widehat{8}$ B) $3,\widehat{82}$ C) $3,\widehat{7}$ D) $3,\widehat{5}$ E) $3,\widehat{6}$

14. De un barril se extrajo 1/4 de vino y luego la mitad de lo que quedaba. ¿Cuántos litros quedaron en el barril si al inicio había 76 litros?

A) 28,6 L B) 28 L C) 28,5 L D) 27 L E) 29 L

Claves

1. D	5. E	9. A	13. A
2. B	6. C	10. B	14. C
3. A	7. C	11. B	
4. D	8. B	12. D	

Reto



Halla el menor valor de n en:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right) = = 0,\widehat{b}$$

Si se sabe que: $b + n < 10$

Rpta.: n = 3

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. ¿Cuánto representa la mitad de la tercera parte de la unidad?

A) 1 /2 B) 2/5 C) 2/3 D) 1/6 E) 1/3

2. ¿Cuál es la fracción generatriz de $0,\widehat{35}$?

A) 40/75 B) 16/45 C) 32/85
D) 25/58 E) 10/45

3. ¿Qué parte es 15 de 25?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

4. Efectúa:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \div \left(\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\right)$$

A) $\frac{65}{32}$ B) $\frac{32}{47}$ C) $\frac{59}{43}$ D) $\frac{35}{23}$ E) $\frac{65}{72}$

5. Calcula los $\frac{3}{5}$ de los $\frac{7}{8}$ de los $\frac{15}{7}$ de la mitad de 16.

A) 4 B) 7 C) 9 D) 11 E) 15

6. Calcula los $\frac{4}{3}$ de los $\frac{5}{8}$ de $\frac{1}{3}$ de 54.

A) 14 B) 13 C) 12 D) 15 E) 16

7. $\frac{1}{2}+\frac{3}{1+\frac{4}{3}}\times\frac{7}{9}$

A) $\frac{2}{3}$ B) 2 C) 3 D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

8. $\frac{3}{5}-\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{3}{8}}\times\frac{1}{12}$

A) $\frac{1}{15}$ B) $-\frac{1}{15}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $-\frac{3}{5}$ E) 3

NIVEL 2

9. De una pieza de tela de 48 m se cortan 3/4. ¿Cuántos metros mide el trozo restante?

A) 10 B) 15 C) 12 D) 36 E) 20

10. ¿Cuántos quintos hay en 6 unidades?

A) 30 B) 25 C) 40 D) 20 E) 35

11. Si gasto los $\frac{3}{7}$ de lo que tengo, ¿qué parte me queda?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{10}{7}$ D) $\frac{7}{31}$ E) $\frac{7}{4}$

12. Si pierdo los $\frac{7}{11}$ de lo que tengo, ¿qué parte me queda?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{8}{11}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{4}{11}$

13. Andrés cada vez que va de compras gasta $\frac{1}{4}$ de lo que tiene en ese momento. Si fue de compras 3 veces y al final le quedaron S/.270, ¿cuánto tenía al inicio?

A) S/.640 B) S/.320 C) S/.360
D) S/.120 E) S/.160

14. Tengo S/.2000 y pierdo $\frac{3}{4}$ de lo que tengo. ¿Cuánto me queda?

A) S/.500 B) S/.2000 C) S/.1800
D) S/.1500 E) S/.1000

15. De los S/.5000 que llevaba en el bolsillo, se me cayeron los $\frac{3}{5}$. ¿Cuánto me queda en el bolsillo?

A) S/.1000 B) S/.2000 C) S/.3000
D) S/.4000 E) S/.1500

16. Calcula M.

$M = 0,\widehat{2} + 0,\widehat{3} + 0,\widehat{4}$

A) $\frac{1}{9}$ B) 1 C) $\frac{1}{3}$
D) 2 E) $\frac{3}{9}$

17. $\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)\left(2\frac{1}{2}+6\frac{4}{5}+5\frac{1}{10}\right)$

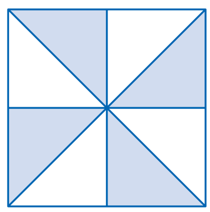
A) 12 B) 13 C) 17 D) 21 E) 23

18. $$\cfrac{3}{3-\cfrac{2}{2-\cfrac{3}{5}}}$$

A) $\frac{11}{21}$ B) 11 C) 21 D) $\frac{21}{11}$ E) $\frac{13}{5}$

NIVEL 3

19. ¿Qué parte del área total, representa el área de la región sombreada?



A) 4/6
B) 3/4
C) 1/2
D) 5/7
E) 2/8

20. Calcula los $\frac{a}{b}$ de los $\frac{p}{q}$ de los $\frac{qb}{ap}$ de 21.

A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{21p}{a}$ C) $\frac{21ap}{qb}$
D) 21p E) 21

21. Calcula los $\frac{m}{n}$ de $\frac{1}{2}$ de los $\frac{a}{b}$ de $\frac{n}{a}$.

A) $\frac{m}{b}$ B) $\frac{2m}{b}$ C) $\frac{b}{m}$
D) $\frac{b}{2m}$ E) $\frac{m}{2b}$

22. De un recipiente lleno de vino se extraen los 3/5, luego los 3/4 del resto y por último 1/5 del nuevo resto. ¿Qué parte del total queda?

A) $\frac{12}{25}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{25}$

23. Luis va a la tienda, primero gasta 4/5 de lo que tiene, luego gasta 1/2 del resto y por último gasta 3/4 del nuevo resto. ¿Qué parte de lo que tenía le quedó?



A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{40}$ E) $\frac{1}{8}$

24. Una persona va a un centro comercial con cierta cantidad de dinero en cada compra gasta 1/3 de lo que tiene. Si compro 3 veces, ¿qué parte de lo que tenía al inicio le quedó?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{2}{27}$ D) $\frac{8}{27}$ E) $\frac{4}{9}$

25. Cada vez que Mario apuesta a los caballos pierde 2/5 de lo que tiene en ese momento. Si apostó 3 veces, ¿qué parte de lo que tenía al inicio le quedó?



A) $\frac{3}{9}$ B) $\frac{9}{25}$ C) $\frac{9}{125}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{27}{125}$

26. Una pelota cae desde cierta altura y en cada rebote pierde 1/3 de la altura de donde cayó. Si cae desde 27 m, ¿qué altura alcanza luego del tercer rebote?

A) 6 m B) 8 m C) 5 m
D) 12 m E) 16 m

27. Halla: 2x – 5; si:

$$0,\underbrace{00\ldots00}_{23\text{ ceros}}1234 = 1234\times10^{x}$$

A) 48 B) 30 C) – 59 D) 43 E) – 40

28. Simplifica:

$$E=\frac{(0,333...)(0,555...)}{(0,444...)(0,1222...)}$$

A) $\frac{15}{48}$ B) $\frac{3}{12}$ C) $\frac{75}{22}$ D) $\frac{15}{44}$ E) $\frac{5}{11}$

Claves

NIVEL 1	NIVEL 2		
1. D	9. C	17. D	25. E
2. B	10. A	18. D	26. B
3. E	11. B	NIVEL 3	27. C
4. E	12. E	19. C	28. C
5. C	13. A	20. E	
6. D	14. A	21. E	
7. E	15. B	22. E	
8. B	16. B	23. D	
		24. D	

Tanto por ciento

DEFINICIÓN

Se denomina tanto por ciento de una cantidad, al número de partes que se toma de la cantidad dividida en 100 partes iguales.

100 partes iguales

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$

m partes

$$\text{m por ciento} = \text{m}\% = \frac{m}{100}$$

Ejemplos:

- 20 por ciento = 20% = $\frac{20}{100}$
- 25 por ciento = 25% = $\frac{25}{100}$
- 75 por ciento = 75% = $\frac{75}{100}$
- 30 por ciento = 30% = $\frac{30}{100}$
- 50 por ciento = 50% = $\frac{50}{100}$
- 10 por ciento = 10% = $\frac{10}{100}$

Equivalencias

Un tanto por ciento se puede expresar como un número racional positivo, es decir, todo tanto por ciento tiene su equivalente que puede ser un número fraccionario, un número decimal o un número entero.

Ejemplos:

- $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
- $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$
- $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0{,}2$
- $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0{,}75$
- $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0{,}4n$
- $60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

PORCENTAJE

Al resultado de aplicar el tanto por ciento de una cantidad, lo llamaremos porcentaje.

$$\text{El a por ciento de b} = \text{a \% de b} = \frac{a}{100} \times b$$

Ejemplos:

- El 20% de 200 = $\frac{20}{100}(200) = 40$
- El 35% de 1000 = $\frac{35}{100}(1000) = 350$
- El 5% de 40 = $\frac{5}{100}(40) = 2$
- El 40% de 80 = $\frac{40}{100}(80) = 32$

Recuerda

Todo número expresado en porcentaje es el número sobre 100.
Ejemplos:

$80\% = \frac{80}{100}$

$60\% = \frac{60}{100}$



Nota

El todo representa a la unidad y como tal equivale al 100%, es decir:

$100\% < > 1$



Importante

Toda cantidad representa el 100% respecto de sí misma. es decir:

$x = 100\%\ x$

APLICACIONES

Tanto por ciento más

Ejemplos:

1. Halla el 40% más de 60.

   Resolución:
   El 40% más es: 100% + 40% = 140%

   Luego: el 140% de 60 = $\frac{140}{100} \cdot 60$

   $= 14 . 6 = 84$

   ∴ El 40% más de 60 es 84.

2. Halla el 25% más de 48.

   Resolución:
   El 25% más es: 100% + 25% = 125%

   Luego: el 125% de 48 = $\frac{125}{100} . 48$

   $= 1,25 . 48 = 60$

   ∴ El 25% más de 48 es 60.

Tanto por ciento menos

1. Halla el 20% menos de 60.

   Resolución:
   El 20% menos es: 100% – 20% = 80%

   Luego: el 80% de 60 = $\frac{80}{100} \cdot 60$

   $= 8 . 6 = 48$

   ∴ El 20% menos de 60 es el 48.

2. Halla el 30% menos de 120.

   Resolución:
   El 30% menos es: 100% – 30% = 70%

   Luego: el 70% de 120 = $\frac{70}{100} . 120$

   $= 0,7 . 120 = 84$

   ∴ El 30% menos de 120 es 84.

Tanto por ciento de tanto por ciento

Ejemplo:
Halla el 20% del 40% de 200.

Resolución:
El 20% de 40% de 200:

$$\frac{20}{100} \quad \frac{40}{100} \quad 200 = 2 . 4 . 2 = 16$$

Relación parte - todo

Para expresar en porcentaje una relación PARTE - TODO, basta con multiplicar por 100%.

$$\frac{\text{Lo que hace de parte}}{\text{Lo que hace de todo}} \times 100\%$$

Ejemplos:

¿Qué tanto por ciento de 80 es 40?

$$\frac{40}{80} \times 100\% = 50\%$$

¿Qué tanto por ciento de 28 es 7?

$$\frac{7}{28} \times 100\% = 25\%$$

¿Qué tanto por ciento representa 100 de 50?

$$\frac{100}{50} \times 100\% = 200\%$$

¿Qué tanto por ciento es 40 de 25?

$$\frac{40}{25} \times 100\% = 160\%$$



Observación

20% más	⇒	120%
50% más	⇒	150%
80% más	⇒	180%
60% más	⇒	160%
40% más	⇒	140%
20% menos	⇒	80%
50% menos	⇒	50%
80% menos	⇒	20%
60% menos	⇒	40%
40% menos	⇒	60%

Atención

En una relación parte-todo también se utilizar la siguiente fórmula:

$$\frac{ES}{DE} \times 100\%$$

Ejemplo:

¿Qué porcentaje DE 50 ES 30?

$$\frac{30}{50} \times 100\% = 60\%$$



Nota

Sea x el número
- 50%x + 10%x = 60%x
- 70%x – 25%x = 45%x
- x + 20%x = 120%x
  (x → 100%x)
- x – 10%x = 90%x
  (x → 100%x)

Descuentos y aumentos sucesivos

Descuentos sucesivos

$$Du = \left(D_1 + D_2 - \frac{D_1 \times D_2}{100}\right)\%$$

Recuerda

Descontar en forma sucesiva el a% y el b% produce el mismo resultado que descontar b% y a%.



Ejemplo:
¿A qué descuento único equivalen dos descuentos sucesivos del 10% y 20%?

Resolución:

$$Du = \left(10 + 20 - \frac{10 \times 20}{100}\right)\%$$

$$Du = (30 - 2)\%$$

$$Du = 28\%$$

Aumentos sucesivos

$$Au = \left(A_1 + A_2 + \frac{A_1 \times A_2}{100}\right)\%$$

Recuerda

También sucede lo mismo para los aumentos del a% y b%, queda el mismo resultado que los aumentos sucesivos del b% y a%.



Ejemplo:
¿A qué aumento único equivalen dos aumentos sucesivos del 20% y 30%?

Resolución:

$$Au = \left(20 + 30 + \frac{20 \times 30}{100}\right)\%$$

$$Au = (50 + 6)\%$$

$$Au = 56\%$$

Aplicaciones comerciales

Generalmente en toda transacción comercial intervienen el precio de costo (Pc), el precio de venta (Pv) y la ganancia (G), y se relacionan de la siguiente manera:

$$Pv = Pc + G$$

Ejemplo:
Compré un televisor a S/.384 y lo vendí ganando el 25% del precio de compra. ¿A cuánto vendí el televisor?

Resolución:
Aplicando: $Pv = Pc + G$
$Pv = ?$
$Pc = S/.384$
$G = 25\%Pc$

Reemplazando: $Pv = Pc + 25\%Pc$

$$Pv = 125\%Pc$$

$$Pv = \frac{125}{100}(384) \Rightarrow Pv = S/.\ 480$$

∴ Vendí el televisor a S/.480.



Atención

También:

$$Pv = Pc - P$$

Donde:

Pv: precio de venta
Pc: precio de costo
P: pérdida

Problemas resueltos

1 ¿De qué número 200 es el 40%?

Resolución:

Sea x el número:

$\frac{40}{100} \cdot x = 200 \Rightarrow x = 50 \cdot 10 \Rightarrow x = 500$

2 ¿De qué número es 48 el 20% más?

Resolución:

Sea x el número:

20% más ⇒ 120%

$\frac{120}{100} \cdot x = 48 \Rightarrow x = 4 \cdot 10 \qquad \therefore x = 40$

3 ¿De qué número es 90 el 25% menos?

Resolución:

Sea x el número.

25% menos ⇒ 75%

$\frac{75}{100} \cdot x = 90 \Rightarrow x = 4 \cdot 30 \qquad \therefore x = 120$

4 ¿Qué tanto por ciento de 1250 es 75?

Resolución:

Aplicamos: $\frac{ES}{DE} \times 100\%$

¿Qué tanto por ciento de (1250) es (75)?

$\frac{75}{1250} \cdot 100\% = 3 \cdot 2\% = 6\%$

5 Halla el 10% del 25% del 40% de 16 000.

Resolución:

Del enunciado tenemos:

$\frac{10}{100} \times \frac{25}{100} \times \frac{40}{100} \times 16\,000$

$5 \times 4 \times 8 = 160$

6 Dos descuentos sucesivos del 40% y 10%, ¿a qué único descuento equivalen?

Resolución:

Por fórmula: $D_u = \left(D_1 + D_2 - \frac{D_1 \times D_2}{100}\right)\%$

Reemplazando:

$Du = \left(40 + 10 - \frac{40 \times 10}{100}\right)\%$

$Du = (50 - 4)\%$

$Du = 46\%$

7 En un aula, de 45 alumnos, 27 son mujeres. ¿Qué porcentaje son varones?

Resolución:

De 45 alumnos, 27 son mujeres, entonces hay 18 varones.

El porcentaje de varones es:

$\frac{18}{45} \cdot 100\% = 40\%$

8 Se vende un artículo en S/.80 ganando el 25%. ¿Cuál fue el precio de costo?

Resolución:

Aplicando: $Pv = Pc + G$

$Pv = S/.\ 80$

$Pc = ?$

$G = 25\%\ Pc$

Reemplazando:

$Pv = Pc + 25\%\ Pc$

$80 = 125\%\ Pc$

$80 = \frac{125}{100} Pc$

$Pc = S/.\ 64$

9 Camila remata su radio y pierde en la venta S/.80. Si esa cantidad representa el 25% de lo que le costó a ella, ¿a cuanto lo compró y a cuánto lo vendió?

Resolución:

Si x representa el precio que costó el radio, entonces:

$80 = 25\%\ x \Rightarrow 80 = \frac{25}{100} \cdot x$

$x = 320$

En la venta del radio pierde S/.80, entonces lo vendió a:

$320 - 80 = S/.240$

∴ Lo compró a S/.320 y lo vendió a S/.240.

Actividades de razonamiento

1. Se sabe de una fiesta que el 32% son varones. Si el número de personas que asistieron es 75, ¿cuál fue el número de hombres?

A) 18 B) 24 C) 28 D) 12 E) 15

2. ¿Cuánto es el 20% del 35% del 42% de S/800?

A) S/. 30,43 B) S/. 17,20 C) S/. 32,52
D) S/. 23,52 E) S/. 28,34

3. ¿De qué número es 50 el 25% más?

A) 40 B) 36 C) 30 D) 42 E) 38

4. ¿El 30% menos de qué número es 140?

A) 72 B) 100 C) 150 D) 220 E) 200

5. Halla el 130% del 120% de 250.

A) 290 B) 420 C) 390 D) 170 E) 280

6. ¿De qué número es 100 El 20%?

A) 400 B) 300 C) 200 D) 500 E) 600

7. ¿Qué porcentaje de 200 es 30?

A) 20% B) 40% C) 35% D) 15% E) 25%

8. ¿Qué porcentaje de 15a es 3a?

A) 20% B) 30% C) 15% D) 10% E) 25%

9. En una empresa hay 32 trabajadores de los cuales 20 son mujeres. ¿Qué porcentaje del número de trabajadores son varones?

A) 20% B) 18,9% C) 14%
D) 37,5% E) 14,19%

10. Si tenía S/.350 y me han regalado S/.140; lo que tengo ahora, ¿qué tanto por ciento es de lo que tenía al principio?

A) 170% B) 140% C) 180%
D) 160% E) 120%

11. ¿Qué descuento único puede reemplazar a dos descuentos sucesivos del 18% y 12%?

A) 30% B) 27,84% C) 25%
D) 28% E) 32%

12. Halla un aumento único que reemplace a tres aumentos sucesivos del 10%, 10% y 40%?

A) 55% B) 60% C) 65%
D) 67% E) 69,4%

13. Dos aumentos sucesivos del 10% y 20% seguido de un descuento del 30%, ¿a qué aumento o descuento único equivalen?

A) 7,6% B) 10% C) 5% D) 8% E) 12%

14. Al comprar unos libros por S/.850 Jimmy paga S/.816. ¿Qué porcentaje de descuento le hicieron?

A) 12% B) 4% C) 8% D) 10% E) 7%

Claves

1. B
2. D
3. A
4. E
5. C
6. D
7. D
8. A
9. D
10. B
11. B
12. E
13. A
14. B

Reto



En un hospital hay internados "a" hombres; "b" mujeres y "c" niños. ¿Qué porcentaje de los que no son hombres son hombres?

Rpta.: $\left(\dfrac{100a}{b+c}\right)\%$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. ¿De qué número es 930 el 24% más?

A) 850 B) 800 C) 750 D) 700 E) 600

2. ¿De qué número es 330 el 32% más?

A) 100 B) 150 C) 200 D) 250 E) 300

3. ¿De qué número es 210 el 30% menos?

A) 250 B) 300 C) 200 D) 150 E) 350

4. ¿De qué número es 320 el 20% menos?

A) 400 B) 100 C) 150 D) 200 E) 250

5. Calcula el 20% del 30% del 40% de 2500.

A) 120 B) 80 C) 100 D) 90 E) 60

6. Calcula el 20% del 25% de los 2/7 de la mitad de 28 000.

A) 180 B) 100 C) 200 D) 210 E) 150

7. Al 10% del 40% de 200 suma el 15% del 24% de 8000.

A) 268 B) 250 C) 368 D) 350 E) 300

8. Calcula el 30% del 40% de 2000.

A) 240 B) 180 C) 350 D) 320 E) 260

9. En una empresa trabajan 420 personas de las cuales el 40% son varones. Si se retira el 25% de las mujeres, ¿cuántos trabajadores quedan en total?



A) 351 B) 357 C) 355 D) 353 E) 359

10. Javier ganó S/. 360 por un trabajo, pero al pagarle le descontaron el 15%, en impuestos. ¿Cuánto recibió Javier?

A) S/. 400 B) S/. 306 C) S/. 450
D) S/. 420 E) S/. 350

NIVEL 2

11. Tres descuentos sucesivos del 50%, 70% y 20%, ¿a qué descuento único equivalen?

A) 88% B) 84% C) 94%
D) 90% E) 78%

12. ¿Qué porcentaje de 8a es 2a?

A) 36% B) 10% C) 20% D) 25% E) 40%

13. Dos aumentos sucesivos del 10% y 20%, ¿a qué único aumento equivalen?

A) 31% B) 24% C) 32% D) 26% E) 28%

14. Dos descuentos sucesivos del 20% y 40%, ¿a qué único descuento equivalen?

A) 50% B) 46% C) 48% D) 52% E) 72%

15. Tres aumentos sucesivos del 20%, 10% y 100%, ¿a qué único aumento equivalen?

A) 148% B) 164% C) 172%
D) 149% E) 128%

16. Después de una de sus batallas, Bolívar observó que el 5% de sus soldados habían muerto y el 20% de los que quedaron vivos estaban heridos, además había 608 ilesos. ¿Cuántos soldados habían muerto?

A) 30 B) 25 C) 60 D) 40 E) 80

17. Hace un mes un artículo costaba S/.50, ahora cuesta S/.70. ¿En qué porcentaje ha aumentado el precio del artículo?

A) 40% B) 60% C) 45% D) 42% E) 54%

18. En una reunión el 40% de las personas son hombres. Si se retiran la mitad de estos, ¿cuál es el nuevo porcentaje de hombres?



A) 15% B) 25% C) 18% D) 35% E) 45%

19. Un granjero tiene 750 huevos. El 4% de estos se rompen y se encuentra que el 5% de los restantes son defectuosos. ¿Cuántos huevos pueden venderse en el mercado?

A) 300 B) 450 C) 675 D) 684 E) 692

20. ¿Qué porcentaje de 20a es 5a?

A) 30% B) 40% C) 50% D) 20% E) 25%

NIVEL 3

21. ¿Qué tanto por ciento del 80% del 40% del 50% de la mitad de 200, representa el 40% del 0,5% del 10% de 500?

A) 0,625% B) 0,750% C) 0,850%
D) 0,90% E) 0,60%

22. El 30% del 120% del 40%, ¿de qué número es el 60% del 80% de 30?

A) 80 B) 90 C) 100 D) 120 E) 150

23. ¿Qué tanto por ciento del 40% del 20% del 50% de 100, representa el 40% del 10% de 500?

A) 500% B) 450% C) 125% D) 480% E) 600%

24. Una persona retira S/.1649. Luego de haber perdido el 15%, ¿cuánto invirtió?

A) S/. 1490 B) S/. 1940 C) S/. 1920
D) S/. 1810 E) S/. 1930

25. Si la base de un triángulo aumenta en 20% y su altura disminuye 20%, ¿cómo varía su área?

A) Aumenta en 8% B) No varía
C) Aumenta en 4% D) Disminuye en 4%
E) Aumenta en 6%

26. De una reunión se retiraron 30 hombres y 36 mujeres. El 12% de los hombres que quedaron equivale al 38% del número de mujeres. De los que quedaron, ¿qué porcentaje son hombres?

A) 72% B) 76% C) 82%
D) 78% E) 69%

27. Lolo disminuye el precio de sus artículos en un 20%. ¿En qué porcentaje deberá aumentar el volumen de sus ventas, para que su ingreso bruto aumente en un 30%?

A) 18,3% B) 60,5% C) 62,5%
D) 48,3% E) 46%

28. En una bodega, el 40% es azúcar, 30% es arroz y el resto fideos. Si se consume el 30% de azúcar y el 70% de arroz, ¿en qué porcentaje disminuyó la bodega?



A) 33% B) 30% C) 28% D) 36% E) 35%

29. Un comerciante redujo en un 20% el precio de venta de cada uno de sus artículos. ¿En qué porcentaje aumentarán sus ventas, si se sabe que sus ingresos aumentaron en un 20%?

A) 40% B) 52% C) 48% D) 51% E) 50%

30. Debo S/. 400 y por la demora en el pago me cobran dos impuestos sucesivos del 10% y 40% . ¿Cuánto debo ahora?

A) S/. 500 B) S/. 530 C) S/. 550
D) S/. 480 E) S/. 616

Claves

NIVEL 1
1. C
2. D
3. B
4. A
5. E
6. C
7. C
8. A
9. B
10. B

NIVEL 2
11. A
12. D
13. C
14. D
15. B
16. D
17. A
18. B
19. D
20. E

NIVEL 3
21. A
22. C
23. A
24. B
25. D
26. B
27. C
28. A
29. E
30. E

Razones y proporciones

RAZÓN

Es el resultado de comparar dos cantidades mediante una operación aritmética (sustracción o división).

Razón aritmética (RA)

Cuando comparamos dos cantidades mediante la operación de sustracción y nos indica en cuánto excede una cantidad a otra.

Ejemplo:
Sean los pesos de Jenny y Gina, 50kg y 38 kg, respectivamente. La razón aritmética de sus pesos es:

$$50 - 38 = 12$$

Antecedente → 50
Consecuente → 38
Valor de la RA → 12

Razón geométrica (RG)

Cuando comparamos dos cantidades mediante la operación de división y nos indica cuántas veces contienen dichas cantidades a una unidad referencial.

Ejemplo:
La producción de una fotocopiadora es de 70 copias por minuto y la de una impresora es de 15 hojas impresas por minuto.

$$\frac{70}{15} = \frac{14}{3}$$

Antecedente → 70
Consecuente → 15
Valor de la RG → $\frac{14}{3}$

Serie de razones geométricas equivalentes

Consideremos razones geométricas, cuyos valores son iguales:

$$\frac{9}{3} = 3 \qquad \frac{12}{4} = 3 \qquad \frac{15}{5} = 3 \qquad \frac{21}{7} = 3$$

Igualando:

$$\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{21}{7} = 3$$

Antecedentes: 9, 12, 15, 21
Consecuentes: 3, 4, 5, 7
Constante de proporcionalidad: 3

Se cumple:

- $$\frac{9 + 12 + 15 + 21}{3 + 4 + 5 + 7} = 3$$

$$\frac{\text{Suma de antecedentes}}{\text{Suma de consecuentes}} = \text{Constante de proporcionalidad}$$

Atención

En general:

Razón	
Aritmética	Geometría
$a - b = r$	$\frac{a}{b} = k$

Donde:
a: antecedente
b: consecuente
r y k: valores de las razones.



Nota

Cuando en un problema se mencione solamente razón o relación, se debe entender que se hace referencia a la razón geométrica.

Nota

En general.
Sean las razones:
$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k$

Donde:
$a_1, a_2, a_3; ...; a_n$: antecedentes
$b_1; b_2; b_3; ...; b_n$: consecuentes
k: constante de proporcionalidad

- $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n} = k$

  $\frac{\text{Suma de antecendentes}}{\text{Suma de consecuentes}} = k$

- $\frac{a_1 \times a_2 \times a_3 \times ... \times a_n}{b_1 \times b_2 \times b_3 \times ... \times b_n} = k^n$

  $\frac{\text{Prod. de antecendentes}}{\text{Prod. de consecuentes}} = k^n$

n: número de razones que se multiplican.

- $\dfrac{9 \times 12 \times 15 \times 21}{3 \times 4 \times 5 \times 7} = 3^4$

$$\frac{\text{Producto de antecedentes}}{\text{Producto de consecuentes}} = \left(\text{Constante de proporcionalidad}\right)^n$$

n : número de razones que se multiplican, en la serie.

PROPORCIÓN

Es la igualdad de dos razones de la misma clase.

Proporción aritmética

Es la igualdad de dos razones aritméticas.

Ejemplo: $15 - 10 = 12 - 7$

15 y 7: términos extremos
10 y 12: términos medios

Proporción aritmética discreta: es aquella cuyos términos medios son diferentes.

Ejemplo: $15 - 12 = 9 - 6$

- 6 es la cuarta diferencial de 15; 12 y 9.

Proporción aritmética continua: es aquella cuyos términos medios son iguales.

Ejemplo: $25 - 21 = 21 - 17$

- 21 es la media diferencial de 25 y 17.
- 17 es la tercera diferencial de 25 y 21.

Proporción geométrica

Es la igualdad de dos razones geométricas.

Ejemplo: $\dfrac{6}{3} = \dfrac{10}{5}$

6 y 5: términos extremos
3 y 10 : términos medios

Proporción geométrica discreta: es aquella cuyos términos medios son diferentes.

Ejemplo: $\dfrac{21}{3} = \dfrac{35}{5}$

- 5 es la cuarta proporcional de 21; 3 y 35.

Proporción geométrica continua: es aquella cuyos términos medios son iguales.

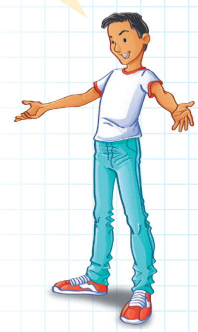
Ejemplo: $\dfrac{45}{15} = \dfrac{15}{5}$

- 15 es la media proporcional de 45 y 5.
- 5 es la tercera proporcional de 45 y 15.

Importante

Resumiendo:

Proporción aritmética	
Discreta	Continua
Extremos: a y d; Medios: b y c $a - b = c - d$	Extremos: a y c; Medios: b y b $a - b = b - c$
d: cuarta diferencial de a; b y c.	b: media diferencial de a y c. c: tercera diferencial de a y b.





Atención

Resumiendo:

Proporción geométrica	
Discreta	Continua
Extremos: a y d; Medios: b y c $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$	Extremos: a y c; Medios: b y b $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$
d: cuarta proporcional de a; b y c.	b: media proporcional de a y c. c: tercera proporcional de a y b.

Problemas resueltos

1 Dos números positivos son entre sí como 7 es a 5. Si la diferencia de sus cuadrados es 96, halla el menor de dichos números.

Resolución:

Sean a y b los números.

$\frac{a}{b} = \frac{7k}{5k}$

Por dato: $(7k)^2 - (5k)^2 = 96$

$49k^2 - 25k^2 = 96$

$24k^2 = 96$

$k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$

$\therefore$ El menor es: $5(2) = 10$

2 La razón geométrica de las raíces cuadradas de dos números es como 2 es a 3. Si la suma de dichos números es 195, halla el mayor de los dos números.

Resolución:

Sean a y b los números.

Luego:

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4k}{9k}$

Por dato: $a + b = 195$

$4k + 9k = 195$

$13k = 195 \Rightarrow k = 15$

$\therefore$ El mayor es: $9(15) = 135$

3 Sabiendo que:

$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{85}{40}$ y $4a + 5b = 140$.

Halla: $a + b$

Resolución:

$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{85}{40} = \frac{17}{8}$

$8a^2 + 8b^2 = 17a^2 - 17b^2$

$25b^2 = 9a^2$

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{25}{9}$

$\frac{a}{b} = \frac{5k}{3k}$

Por dato: $4a + 5b = 140$

$4(5k) + 5(3k) = 140$

$20k + 15k = 140$

$35k = 140$

$k = 4$

Piden:

$a + b = 5k + 3k = 8k = 8(4) = 32$

4 Si: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$ y $2a + 3b - c = 42$

Halla el valor de: $a + 2b - c$

Resolución:

Se sabe que:

$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = k$

$a = 3k$; $b = 5k$ y $c = 7k$

Por dato: $2a + 3b - c = 42$

$2(3k) + 3(5k) - 7k = 42$

$6k + 15k - 7k = 42$

$14k = 42$

$k = 3$

Piden: $a + 2b - c = 3k + 2(5k) - 7k$

$= 3k + 10k - 7k$

$= 6k$

$\therefore a + 2b - c = 6(3) = 18$

5 La razón aritmética de dos números es 27 y su razón geométrica es 7/4. Halla el menor de los números.

Resolución:

Sean a y b los números.

$RG = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7k}{4k}$

$RA = 27 \Rightarrow a - b = 27$

$7k - 4k = 27$

$3k = 27$

$k = 9$

$\therefore$ El menor es: $4(9) = 36$

6 Sabiendo que: $\frac{a^2}{8}=\frac{b^2}{18}=\frac{c^2}{32}=\frac{d^2}{50}$,

además: $b+c-a=15$, halla $a+b+c+d$.

Resolución:

$$\frac{a^2}{8}=\frac{b^2}{18}=\frac{c^2}{32}=\frac{d^2}{50}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4}=\frac{b^2}{9}=\frac{c^2}{16}=\frac{d^2}{25}$$

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{5}=k$$

$a=2k$; $b=3k$; $c=4k$; $d=5k$

Dato: $b+c-a=15$

$\Rightarrow 3k+4k-2k=15$

$5k=15 \Rightarrow k=3$

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{d}{5}=3$$

$$\frac{a+b+c+d}{2+3+4+5}=3$$

$a+b+c+d=3\times 14$

$\therefore a+b+c+d=42$

7 El producto de los cuatro términos de una proporción geométrica continua es 1296 y el cuarto término es 2, ¿cuál es el primer término?

Resolución:

Sea: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ la proporción geométrica continua.

Entonces: $a \times c$

Según el enunciado $a\,.\,b.\,b.\,c=1296$

$a\,.\,c.\,b^2=1296$

$b^2\,.\,b^2=1296$

$b^4=1296 \Rightarrow b=6$

Por dato, el cuarto término es 2, entonces:

$$\frac{a}{6}=\frac{6}{2}$$

$2a=36$

$\therefore a=18$

8 Dos números son entre sí como 3 es a 4. Si la suma de sus cubos es 728, halla el mayor.

Resolución:

Sean a y b los números.

Según el enunciado: $\frac{a}{b}=\frac{3k}{4k}$

Por dato: $a^3+b^3=728$

$(3k)^3+(4k)^3=728$

$27k^3+64k^3=728$

$91k^3=728$

$k^3=8 \Rightarrow k=2$

$\therefore$ El mayor es: $4(2)=8$

9 En una proporción geométrica continua, el primer término es 1/4 del cuarto término. Si la suma de los cuatro términos de dicha proporción es 54, halla el término medio de la proporción.

Resolución:

Sea: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ la proporción geométrica continua.

Según el enunciado:

$\frac{c}{b}=\frac{b}{4c} \Rightarrow b^2=4c^2$

$b=2c$

Dato:

$c+2b+4c=54$

$2b+5c=54$

$2(2c)+5c=54$

$4c+5c=54$

$9c=54 \Rightarrow c=6$

$\therefore$ Término medio es: $b=2(6)=12$

10 Se tiene la siguiente serie de razones:

$$\frac{a}{7}=\frac{b}{11}=\frac{c}{13}$$

Calcula el valor de E:

$$E=\frac{2a+c}{5b-4a}\div\frac{8b-6c}{7c+9b}$$

Resolución:

$$\frac{a}{7}=\frac{b}{11}=\frac{c}{13}=k$$

$a=7k$; $b=11k$; $c=13k$

Procedemos a calcular E:

$$E=\frac{2(7k)+13k}{5(11k)-4(7k)}\div\frac{8(11k)-6(13k)}{7(13k)+9(11k)}$$

$$=\frac{14k+13k}{55k-28k}\div\frac{88k-78k}{91k+99k}$$

$$=\frac{27k}{27k}\div\frac{10k}{190k}$$

$\therefore E=19$

Actividades de razonamiento

1. Dos números son entre sí como 3 es a 7. Si la suma de sus cuadrados es 522, halla el mayor.

A) 9 B) 12 C) 21 D) 18 E) 15

2. La razón geométrica de dos números es de 2 a 5 y la suma de sus cubos es 1064. Halla el menor.

A) 8 B) 4 C) 10 D) 6 E) 12

3. Si: $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}$ y $2b-c=39$;

halla el valor de: $a+b+c$

A) 195 B) 169 C) 180 D) 225 E) 182

4. Si: $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{9}$

Halla la suma de antecedentes si: $3a-2b+c=132$

A) 180 B) 270 C) 234 D) 216 E) 198

5. El producto de los cuatro términos de una proporción geométrica continua es 1296. Halla la media proporcional.

A) 4 B) 8 C) 6 D) 2 E) 10

6. En una proporción geométrica continua, la suma de los extremos es 51 y la diferencia de los mismos es 45. Halla la media proporcional.

A) 8 B) 16 C) 10 D) 12 E) 14

7. Si **a** es la media proporcional de 8 y 18, y **b** es la tercera proporcional de 9 y 12, halla la cuarta proporcional de a ; b y 15 .

A) 15 B) 20 C) 25 D) 18 E) 16

8. En una proporción geométrica continua los términos extremos están en la relación de 4 a 9, siendo la suma 39. Halla la media proporcional.

A) 18 B) 20 C) 24 D) 22 E) 16

9. Gina tiene 15 años y Camila 37 años. ¿Dentro de cuántos años la razón de sus edades será de 3 a 5?

A) 16 B) 15 C) 18 D) 20 E) 34

10. Se tienen 100 bolas, de las cuales 40 son negras y las restantes blancas. ¿Cuántas bolas negras deben agregarse para que, por cada 8 bolas negras haya 3 bolas blancas?

A) 100 B) 80 C) 90 D) 120 E) 140

11. Si en una proporción geométrica continua, la media proporcional es 24 y la razón es 2/3. Calcula la diferencia de los extremos.

A) 15 B) 18 C) 24 D) 16 E) 20

12. Si: $\frac{C}{5} = \frac{P}{12} = \frac{V}{13}$ y $\sqrt{C^2 + P^2} = 78$

Halla: $C + P + V$

A) 150 B) 180 C) 120 D) 140 E) 160

13. Sabiendo que:

$\frac{a}{4} = \frac{b}{8} = \frac{c}{7} = \frac{d}{9}$ y $ac + bd = 14\,400$

Halla la suma de los antecedentes.

A) 336 B) 326 C) 306 D) 316 D) 436

14. El producto de los cuatro términos de una proporción geométrica continua es 50 625. Si el cuarto término es 25, halla la suma de los cuatro términos.

A) 56 B) 68 C) 70 D) 54 E) 64

Claves

1. C	5. C	9. C	13. A
2. B	6. D	10. D	14. E
3. A	7. B	11. E	
4. D	8. A	12. B	

Reto



Dado: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Además: $\frac{ab + c^2}{b^2 + cd} = 3$

y $a + b + c + d = 28$

Calcula el valor de: $b + d$

Rpta.: 7

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. La razón geométrica de 2 números es 7/15 y su diferencia es 56. ¿Cuál es el número menor?

   A) 70 B) 63 C) 49 D) 135 E) 105

2. Si: $\frac{a}{b} = \frac{6}{11}$, calcula: $\frac{3a + 2b}{3a - 2b}$

   A) 10 B) 11 C) –11 D) 12 E) –10

3. Dos números son entre sí como 4 es a 11. Halla la suma de los números, sabiendo que su razón aritmética es 84.

   A) 180 B) 120 C) 150 D) 300 E) 200

4. La suma de los cuadrados de 2 números es 2250; si su razón geométrica es 9/13, ¿cuál es el menor?

   A) 27 B) 39 C) 33 D) 36 E) 24

5. Dos números son entre sí como 3 es a 5. Si la suma de sus cubos es 1216. Halla el mayor.

   A) 6 B) 15 C) 10 D) 12 E) 18

6. Dos números son entre sí como 8 es a 3. Si la razón aritmética de sus cuadrados es 495, halla el mayor de los números.

   A) 30 B) 36 C) 25 D) 24 E) 40

7. Si: $\frac{a}{b} = \frac{9}{5}$, halla el valor de:

   $$E = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$$

   A) 108/53 B) 98/53 C) 78/53
   D) 96/53 E) 116/53

8. Dos números son entre sí como 9 es a 4. Si la suma de la tercera parte del mayor y la mitad del menor es 75. Halla el menor de los números.

   A) 60 B) 80 C) 90 D) 50 E) 75

9. Dos números son entre sí como 20 es a 9. Si la suma de la quinta parte del mayor y la tercera parte del menor es 84. Halla el mayor de dichos números.

   A) 210 B) 250 C) 270 D) 240 E) 300

NIVEL 2

10. Si: $\frac{a}{5} = \frac{b}{8} = \frac{c}{7}$ y $a + b - c = 12$;
    halla el valor de: $a - b + c$

    A) 12 B) 10 C) 8 D) 16 E) 20

11. Si: $\frac{A^2}{16} = \frac{B^2}{25}$ y $B - A = 7$;

halla el valor de: $\frac{9AB}{A + B}$

A) 120 B) 130 C) 150
D) 180 E) 140

12. Si: $\frac{5a + 6b}{3a + 2b} = \frac{8}{3}$;

halla la razón geométrica de b y a.

A) 2/9 B) 9/2 C) 7/2 D) 2/7 E) 5/2

13. Si: $\frac{a + 3b}{4a - 2b} = \frac{1}{3}$;

halla el valor de: $E = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

A) 82/9 B) 26/5 C) 50/9
D) 122/11 E) 10/3

14. Sea **A** la media diferencial de 24 y 16, y **B** la cuarta diferencial de 10; 8 y 18. Halla la tercera diferencial de **A** y **B**.

A) 8 B) 10 C) 15 D) 16 E) 12

15. Si **A** es la tercera proporcional de 16 y 12, **B** es la cuarta proporcional de 8; 10 y 20. Halla la media proporcional de **A** y **B**.

A) 15 B) 20 C) 25 D) 18 E) 12

16. Si: $\frac{a}{b} = 3$, halla el valor de:

$$P = \frac{2a^2 + 6ab + 4b^2}{5b^2}$$

A) 5 B) 8 C) 6 D) 4 E) 3

17. ¿Cuánto se debe aumentar simultáneamente a cada uno de los números 13, 4; 11 y 3 para que se forme una proporción geométrica?

A) 1 B) 3 C) 2 D) 5 E) 4

18. La tercera proporcional de $(x - 2)$ y $(x + 2)$ es $(x + 8)$. ¿Cuál es la cuarta proporcional de x; $x + 6$ y $x + 5$?

A) 18 B) 20 C) 25 D) 24 E) 30

NIVEL 3

19. En una serie de razones geométricas equivalentes los antecedentes son 3; 5 y 8, la suma de los consecuentes es 240. ¿Cuál es el menor consecuente?

A) 75 B) 120 C) 15 D) 60 E) 45

20. Si se cumple que:

$$\frac{\sqrt{x}}{3} = \frac{\sqrt{y}}{4}$$

Además: $x + y = 75$

Calcula el valor de: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12}$

A) 273 B) 276 C) 278 D) 270 E) 290

21) Si: $\frac{a+b}{5} = \frac{a-b}{2}$

Además: $ab = 189$

Calcular el valor de: b^2

A) 9 B) 4 C) 25 D) 81 E) 36

22) Se tiene la siguiente serie de razones geométricas equivalentes:

$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9}$

Halla la suma de los antecedentes, Si:

$6a - 5b + c = 32$

A) 165 B) 168 C) 169 D) 161 E) 170

23) Si se sabe que: $\frac{x+3}{x-3} = \frac{b}{c}$

y además: $\frac{b+c}{b-c} = 3$

Halla el valor de x.

A) 6 B) 3 C) 9 D) 5 E) 8

24) Sabiendo que:

$\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$; $\frac{c}{d} = \frac{13}{6}$

Calcula: $M = \frac{8ac - 3bd}{9bd - 4ac} - \frac{20}{59}$

A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 4

25) Si: $\frac{A}{4} = \frac{B}{3} = \frac{C}{5}$ y $\frac{23A\,B}{3A + 2B + C} = 60$

Halla el valor de: $(3B - C)$

A) 25 B) 35 C) 20 D) 18 E) 24

26) Sabiendo que:

$\frac{A}{2} = \frac{B}{5} = \frac{C}{7}$ y $\frac{21AC}{4A - 3B + 2C} = 294$

Halla el valor de: $(B - 2A - 1)(C + B - 4A)$

A) 168 B) 163 C) 165 D) 170 E) 162

27) Si la suma de 2 números es **M** y la diferencia es **N**. ¿Cuál es la razón geométrica entre el mayor y menor?

A) $(M - N)/(M + N)$ B) $(M + N)/(M - N)$
C) $(M + N)/2$ D) $(M - N) / 2$
E) $(M + N)/M$

Claves

NIVEL 1			
1. C	8. A	15. A	22. B
2. E	9. D	16. B	23. C
3. A	NIVEL 2	17. D	24. D
4. A	10. C	18. D	25. C
5. C	11. E	NIVEL 3	26. A
6. D	12. B	19. E	27. B
7. B	13. D	20. A	
	14. E	21. D	

Orden de información

DEFINICIÓN

Este tipo de problemas se caracterizan por presentar un conjunto de datos desordenados que contienen toda la información que se requiere para dar respuesta al problema. La manera más sencilla de resolverlos es haciendo figuras, líneas, gráficos, cuadros, etc. Los principales casos son:

Ordenamiento lineal

Se aplica para el ordenamiento de alturas, tamaños, edades, puntajes, etc.

Ejemplo:
4 amigos están reunidos. Se sabe que:

- Ciro es mayor que Ramón.
- Manolo es mayor que Juvenal.
- Solo uno de ellos es menor que Juvenal.
- Ciro no es el mayor.

Ordenar de mayor a menor:

Resolución:

- Solo uno de ellos es menor que Juvenal.

Mayor
Juvenal
Menor

- Manolo es mayor que Juvenal.

Mayor Manolo Juvenal Menor	o	Mayor Manolo Juvenal Menor

- Ciro es mayor que Ramón.

Mayor Ciro Manolo Juvenal Ramón Menor	o	Mayor Manolo Ciro Juvenal Ramón Menor

- Ciro no es el mayor.

Mayor
Manolo
Ciro
Juvenal
Ramon
Menor

El orden de mayor a menor es:
Manolo - Ciro - Juvenal - Ramón

Atención

Convencionalmente los valores mayores se colocan en la parte superior y de forma contraria cuando se trata de valores menores.

Mayor Valor
Menor Valor



Nota

Ejemplo:
Alfredo es más alto que Jimena.

Alto
Alfredo
Jimena
Bajo

Ejemplo:
Marco gana más que Cristian.

Más
Marco
Cristian
Menos

Ordenamiento por posición de datos

Se aplica para la distribución de personas en un edificio.

Ejemplo:
En un edificio de 4 pisos viven 4 familias (1 familia en cada piso). La familia Cueva vive un piso más arriba que la familia Albarracín, la familia Meneses habita más arriba que la familia Tarazona y la familia cueva más abajo que la familia Tarazona. ¿En qué piso vive la familia Cueva?

Resolución:

- La familia Cueva vive un piso más arriba que la familia Albarracín.

		Cueva
	Cueva	Albarracín
Cueva	Albarracín	
Albarracín		

- La familia Cueva vive más abajo que la familia Tarazona.

	Tarazona	Tarazona
Tarazona		Cueva
Cueva	Cueva	Albarracín
Albarracín	Albarracín	

- La familia meneses habita más arriba que la familia Tarazona.

Meneses
Tarazona
Cueva
Albarracín

- Por lo tanto, la familia Cueva vive en el segundo piso.

Ordenamiento por cuadros de doble entrada

Se aplica cuando se ordena a personas relacionándolas con alguna característica que les pertenece.

Ejemplo:
Celeste, Alexandra y Silvana son 3 artistas; una de ellas es cantante, la otra bailarina y la otra actriz. Celeste le dice a la bailarina que ella y Silvana fueron a visitarla a su casa pero no la encontraron. A Silvana le gusta cantar. ¿Quién es la actriz?

Resolución:
Celeste y Silvana fueron a visitar a la bailarina.
Conclusión: Celeste y Silvana no son bailarinas, entonces Alexandra es bailarina.

	Cantante	Bailarina	Actriz
Celeste		✗	
Alexandra	✗	✓	✗
Silvana		✗	

A Silvana le gusta cantar.
Conclusión: Silvana es cantante, entonces Celeste es actriz.

	Cantante	Bailarina	Actriz
Celeste	✗	✗	✓
Alexandra	✗	✓	✗
Silvana	✓	✗	✗



Observación

Recuerda que al enumerar los pisos de un edificio se hace de abajo hacia arriba.

4.°
3.°
2.°
1.°



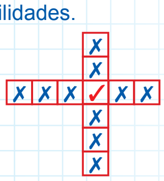
Atención

Ejemplo:
En un edificio de 4 pisos la familia A vive un piso más arriba que la familia B. Se presentan tres posibilidades:

		A
	A	B
A	B	
B		

Nota

Cuando en un cuadro coloques Sí representado por ✓, entonces la fila y columna que contiene el Sí ✓, se completa con No representado por ✗, porque el Sí ✓ lo que hace es descartar las demás posibilidades.



Problemas resueltos

1 En una oficina trabajan 5 empleados. Se sabe que:

- Richard gana más que Manuel.
- José gana menos que Marco.
- Raúl no es el que más gana.
- José gana más que Richard.
- Raúl gana el doble que José.

a) ¿Quién es el que gana más?

b) ¿Quién gana menos que José, pero más que Manuel?

Resolución:

Richard gana más que Manuel.

Richard
Manuel

José gana menos que Marco.

Marco
José

José gana más que Richard.

José
Richard

Raúl gana el doble que José.

Raúl
José

Luego, Raúl no es el que más gana.

Marco
Raúl
José
Richard
Manuel

Finalmente:

a) Marco es el que gana más.

b) Richard.

2 En un concurso de glotones se ha pesado 7 personas y se obtuvieron los siguientes resultados:

- Willian pesa menos que Igor, pero más que Jerónimo.
- Jonás pesa igual que Mario pero más que Igor.
- Katty pesa más que Jerónimo pero menos que William.
- Mario pesa más que Jerónimo pero menos que Eder.

a) ¿Quién es el más pesado de los concursantes?

b) ¿Cuántas personas pesan más que Katty?

Resolución:

William pesa menos que Igor, pero más que Jerónimo.

Igor
William
Jerónimo

Jonás pesa igual que Mario, pero más que Igor.

Jonás – Mario
Igor

Katty pesa más que Jerónimo, pero menos que William.

William
Katty
Jerónimo

Mario pesa más que Jerónimo, pero menos que Eder.

Eder
Mario
Jerónimo

Luego:

Eder
Mario – Jonás
Igor
William
Katty
Jerónimo

a) El más pesado es Eder.

b) 5 personas (Eder, Mario, Jonás, Igor y William).

3 Celso, Ramón y Teófilo son 3 periodistas que trabajan en televisión, radio y periódico. Se sabe que:

- Ramón trabaja en televisión.
- Celso no trabaja en radio.

a) ¿Quién trabaja en periódico?

b) ¿En dónde trabaja Teófilo?

Resolución:

De los datos se tiene:

	Televisión	Radio	Periódico
Celso	✗	✗	✓
Ramón	✓	✗	✗
Teófilo	✗	✓	✗

a) Celso

b) Radio

4 De un grupo de amigos se sabe que:

- Ariel no es mayor que Brian.
- Carlos no es mayor que Danilo.
- Danilo no es el mayor.

- Edú es mayor que Ariel.
- Danilo es mayor que Edú.

¿Quién es el mayor?

Resolución:

Ariel no es mayor que Brian.

↑ Brian
Ariel ↓

Carlos no es mayor que Danilo.

↑ Danilo
Carlos ↓

Edú es mayor que Ariel.

↑ Edú
Ariel ↓

Danilo es mayor que Edú.

↑ Danilo
Edú ↓

Luego, Danilo no es el mayor.

↑ Brian
Danilo
Carlos
Edú
Ariel ↓

∴ Brian es el mayor.

5 Elder, Aníbal y Miguel son 3 destacados deportistas en fútbol, vóley y básquet, y se sabe que:

- A Elder y Miguel no les gusta el básquet.
- A Miguel no le gusta el fútbol.

a) ¿Qué deporte practica Aníbal?
b) ¿Quién practica fútbol?

Resolución:

A Elder y Miguel no les gusta el básquet, entonces Aníbal practica básquet.

A Miguel no le gusta el futbol, entonces Miguel práctica vóley.

Luego: Elder practica fútbol

	Futbol	Vóley	Básquet
Elder	✓	✗	✗
Aníbal	✗	✗	✓
Miguel	✗	✓	✗

a) Básquet
b) Elder

6 En un examen de admisión 5 amigos obtuvieron los siguientes resultados:

- B obtuvo un punto más que D.
- D obtuvo un punto más que C.
- E obtuvo dos puntos menos que D.
- B obtuvo dos puntos menos que A.

Ordena en forma creciente.

Resolución:

B obtuvo un punto más que D.

↑ B
D ↓

D obtuvo un punto más que C.

↑ D
C ↓

E obtuvo dos puntos menos que D.

↑ D
E ↓

B obtuvo dos puntos menos que A.

↑ A
B ↓

Luego:

↑ A
B
D
C
E ↓

∴ ECDBA

7 Ángel, Bryan, Cristian y Darío son cuatro detectives que se han especializado en combatir diferentes modalidades de delitos: robo, estafa, secuestros y asesinatos, no necesariamente en ese orden. Se sabe que:

- Cristian capturó al cabecilla del último asalto a un banco.
- En una intervención del departamento de homicidios, Bryan fue herido de bala.
- Hace un tiempo, Ángel rescató a una niña de manos de un captor.

a) ¿Qué especialidad tiene Ángel?

b) Cierta persona engañó a una anciana con el cuento de la "casa propia". El detective que se encarga de este caso es:

Resolución:

Cristian capturó al cabecilla del último asalto a un banco, entonces Cristhian es detective de robo.

Bryan fue herido de bala en una intervención del departamento de homicidios, entonces Bryan es detective de asesinatos.

Ángel rescató a una niña de manos de un captor, entonces Ángel es detective de secuestros.

Luego, Darío será detective de estafa.

Ordenando en un cuadro se tiene:

	Robo	Estafa	Secuestro	Asesinato
Ángel	✗	✗	✓	✗
Bryan	✗	✗	✗	✓
Christian	✓	✗	✗	✗
Darío	✗	✓	✗	✗

a) Ángel es especialista en secuestros.
b) Darío

8 Los Flores, Cubas, Guerrero y Anicama son cuatro familias limeñas que van a viajar en sus vacaciones a Cusco, Arequipa, Huancavelica y Moquegua, no necesariamente en este orden. Se sabe que:

- Ninguna familia fue al lugar de nacimiento de los padres.
- El señor Guerrero y su familia viajarán a Arequipa.
- La familia Anicama no viajará a Cusco ni Moquegua.
- El señor Flores es de Huancavelica y su esposa de Cusco.

a) ¿Dónde viajarán, a pasar sus vacaciones, los Anicama?
b) Con toda seguridad, ¿en qué lugar no nacieron los esposos Cubas?

Resolución:

Los Guerrero viajaron a Arequipa.
Los Anicama no viajarán a Cusco ni Moquegua, entonces los Anicama viajarán a Huancavelica.
El señor Flores es de Huancavelica y su esposa de Cusco, entonces los Flores viajan a Moquegua.

Ordenando los datos en una tabla se tiene:

	Cuzco	Arequipa	Huancavelica	Moquegua
Flores	✗	✗	✗	✓
Cubas	✓	✗	✗	✗
Guerrero	✗	✓	✗	✗
Anicama	✗	✗	✓	✗

a) Los Anicama viajarán a Huancavelica.
b) No nacieron en Cusco.

9 4 amigos: Axel, Belisario, Casimiro y Dalmiro, viven en un mismo edificio en diferentes pisos. Si se sabe que:

- Belisario vive en el primer piso.
- Casimiro vive adyacente a Dalmiro y Belisario.
- Axel vive más arriba que Dalmiro.

¿En qué piso vive Dalmiro?

Resolución:

Belisario vive en el primer piso.

Belisario

Casimiro vive adyacente a Dalmiro y Belisario.

Dalmiro
Casimiro
Belisario

Axel vive más arriba que Dalmiro.

Axel
Dalmiro
Casimiro
Belisario

∴ Dalmiro viven en el 3.er piso.

Actividades de razonamiento

1. Tres amigos: Jorge, Pedro y Raúl se encuentran y comentan sobre los colores de sus carros. Solo hay 3 colores: azul, rojo y verde, y no hay dos carros con el mismo color. Jorge dice: "Mi carro no es rojo ni azul". Raúl dice: "Me hubiera gustado que sea rojo". ¿De qué color es el carro de Pedro?

   A) Azul B) Rojo C) Verde
   D) Blanco E) Faltan datos

2. Tres amigos: Fernando, Julio y Luis tienen cada uno un animal diferente.
   Se sabe que:
   – Fernando le dice al dueño del gato que el otro amigo tiene un canario.
   – Julio le dice al dueño del gato que su mascota y el perro pelean siempre.
   ¿Qué animal tiene Julio y quién es el dueño del perro?

   A) Gato - Julio B) Gato - Luís
   C) Canario - Luis D) Canario - Fernando
   D) Perro - Fernando

3. Cuatro hermanos viven en un edificio de 4 pisos. Arturo vive en el primer piso, Mario vive más abajo que Jorge, y Willy vive un piso más arriba que Mario. ¿En qué piso vive Willy?

   A) 1.° B) 4.° C) 3.°
   D) Faltan datos E) 2.°

4. En un cierto examen: Rosa tuvo menos puntaje que María; Laura menos puntos que Lucía; Noemí el mismo puntaje que Sara; Rosa más que Sofía; Laura el mismo puntaje que María, y Noemí más que Lucía. ¿Quién tuvo menos puntaje?

   A) Lucía B) Sofía C) María
   D) Laura E) Rosa

5. En una carrera entre 5 amigas, María va en primer lugar y Lucía en el quinto puesto. Si Leticia va en el puesto intermedio entre ambas, Juana le sigue a Leticia e Irene está mejor ubicada que Juana. ¿Quién ocupa el segundo lugar?

   A) Irene B) Leticia C) Juana
   D) Lucía E) María

6. Luis es el alumno más alto de su salón. En ese mismo salón Pedro es más alto que Mario, pero más bajo que Jorge. De estas afirmaciones podemos deducir:
   I. Pedro, Mario y Jorge son más bajos que Luis.
   II. Jorge es más bajo que Pedro y más alto que Mario.
   III. Jorge es el más bajo.

   A) Solo I B) Solo II C) I y II
   D) I y III E) II y III

7. Tres hermanos practican natación, atletismo o básquet. Cada deporte se identifica con un color: azul, rojo y verde. Juan no sabe nadar. El que juega por el verde es atleta. Los rojos no juegan básquet. Gustavo participa con el verde. ¿Qué deporte y color le corresponde a Alberto?

   A) Natación-Rojo B) Básquet-Verde
   C) Atletismo-Rojo D) Natación-Verde
   E) Básquet-Azul

8. Cuatro amigos: Jorge, Luis, Pablo y Mario practican cada uno un deporte diferente. Jorge juega básquet. Luis le pide prestadas sus raquetas de frontón a Mario. Pablo no sabe nadar. ¿Qué deporte practica Luis?

   A) Natación B) Frontón
   C) Fútbol D) Frontón y natación
   E) Básquet

9. Rita, Consuelo y Ana son amigas. Una es soltera, otra es casada y la otra es viuda, (no necesariamente en ese orden).
Se sabe que:
– Ana no es casada y debe 5 soles a la verdulera.
– La viuda y Rita solo le deben a la carnicera.
¿Quién es la casada?

A) La verdulera B) Ana C) Rita
D) Faltan datos E) Consuelo

10. Cinco amigos están sentados uno al lado del otro, en una fila. Se sabe que:
– Vilma se sienta a la izquierda de José.
– Eder está a la derecha de Dante.
– Adrián está junto y a la derecha de José y, además está junto a Dante.
¿Quién está en el extremo derecho?

A) Adrián B) Eder C) José
D) Vilma E) Dante

11. Teófilo es el alumno más alto en un salón. En el mismo salón Burto es más alto que Cirilo y más bajo que Dum. De estas afirmaciones se puede decir que:
I. Burto, Cirilo y Dum son más bajos que Teófilo.
II. Dum es más bajo que Burto y más alto que Cirilo.
III. Dum es más bajo que todos.
Son verdaderas:

A) Todas B) I y III C) Solo II
D) Ninguna E) Solo I

12. Lucy, Lupe y Lucho terminaron sus estudios en Arte, ingeniería, matemática y educación (una carrera por persona). Se sabe: Lucy no estudió arte; Lupe habría estudiado educación si Lucas hubiera estudiado ingeniería; Lucho quiere empezar a estudiar matemática; Lucas estudiaría artes si Lupe lo hiciera; Lucy estudiaba educación pero se trasladó a matemáticas. ¿Qué estudiaron Lupe y Lucho?
A) Arte - Economía B) Ingeniería - Arte
C) Arte - Educación D) Educación - Arte
E) Ingeniería - Economía

13. Un edificio, tiene 6 pisos, seis amigas A, B, C, D y F ocupan los seis pisos con solo una amiga en cada piso.
– L está a tantos pisos de B como B está de A.
– B y E no están en pisos adyacentes.
– F está más arriba que D.
– A está en el quinto piso.
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
A) B debe estar en el tercer o cuarto piso.
B) C debe estar en el tercer o primer piso.
C) D debe estar en el primer o segundo piso.

A) B y C B) A y B C) Solo A
D) A y C E) Todas

14. Tito, Lalo, Luis y Eduardo practican los siguientes deportes: fútbol, atletismo, natación y tenis; y viven en los distritos de Los Olivos, Breña, San Borja y Miraflores. Se sabe que:
– Luis no vive en Los Olivos ni en Breña.
– El atleta vive en Los Olivos.
– Lalo vive en Miraflores.
– Eduardo es futbolista.
– El nadador nunca ha emigrado de San Borja.
¿Qué deporte practica Lalo?

A) Natación B) Atletismo C) Fútbol
D) Tenis E) Básquetbol

Claves

1. B	5. A	9. C	13. E
2. D	6. A	10. B	14. D
3. C	7. A	11. E	
4. B	8. A	12. B	

Reto



Un mensajero debe entregar 5 correspondencias: C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5.
Se sabe que:
C_5 debe entregarse previo a C_2.
C_3 debe entregarse a continuación de C_2.
C_2 debe entregarse antes que C_4.
C_4 debe entregarse a continuación de C_1.
¿Cuál fue el orden en que se entregaron?

Rpta.: $C_5\ C_2\ C_3\ C_1\ C_4$

Refuerza practicando

NIVEL 1

En una reunión se encuentran cinco amigos cuyos nombres son: Mario Antonio, Juan Carlos, Luis Miguel, Carlos Alfonso y Javier Enrique. Estos a su vez son: atleta, futbolista, obrero textil, economista e ingeniero industrial, aunque no necesariamente en ese orden. Y se sabe además que:

- El atleta, que es primo de Mario Antonio y Carlos Alfonso, es el más joven de todos y siempre va al cine con Juan Carlos.
- Luis Miguel, que es el mayor de todos, es vecino del futbolista, quien a su vez es millonario.
- Mario Antonio, que es sumamente pobre, tiene cinco años menos que el ingeniero industrial; pero es mayor que el economista.
- Juan Carlos no estudió una carrera universitaria.
- Cada uno de los cinco amigos realiza una y solo una de las ocupaciones indicadas anteriormente.

1. ¿Quién es el ingeniero industrial?

A) Mario Antonio B) Juan Carlos
C) Luis Miguel D) Javier Enrique
E) No se puede precisar

2. La asociación correcta es:

A) Mario Antonio - obrero textil
B) Juan Carlos - ingeniero industrial
C) Luis Miguel - futbolista
D) Carlos Alfonso - atleta
E) Javier Enrique - obrero textil

3. Juan Carlos es:

A) Primo de Mario Antonio.
B) Millonario.
C) Cinco años menor que Mario Antonio.
D) Vecino del economista.
E) Ninguna es correcta.

4. La afirmación incorrecta es:

A) El obrero textil es menor que el ingeniero industrial.
B) El futbolista va al cine con Javier Enrique.
C) Juan Carlos no es ingeniero industrial.
D) Luis Miguel es economista.
E) Carlos Alfonso no es ingeniero.

A una audición asisten tres músicos: Álvaro, Jorge y Bruno. Se sabe que:



- Álvaro solamente toca quena, zampoña, guitarra o mandolina.
- Jorge solamente toca quena, guitarra, charango o tambor.
- Bruno solamente toca quena, zampoña, mandolina o charango.
- Cada uno de los músicos no puede tocar más de un instrumento al conformar un trío.

5. ¿Cuántos tríos de mandolina, charango y tambor se pueden formar?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) Más de 3

6. ¿Cuántos tríos de quena, guitarra y zampoña se pueden formar?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) Más de 4

7. Si se desea formar un trío de zampoña, guitarra y mandolina, entonces, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   I. Álvaro tocará la zampoña.
   II. Bruno tocará la mandolina.
   III. Jorge tocará la guitarra.

   A) Solo I B) Solo II C) Solo III
   D) I y III E) II y III

8. Si se forma un trío donde Álvaro toca la guitarra, entonces es imposible que:

   A) Se forme un trío de guitarra, zampoña y mandolina.
   B) Se forme un trío de guitarra, mandolina y charango.
   C) Se forme un trío de guitarra, mandolina y tambor.
   D) Bruno toque la zampoña.
   E) Jorge toque la quena.

NIVEL 2

Arturo, Bruno, Carlos y Dante viven en los siguientes distritos: Ate, Breña, Comas y Lince, pero no necesariamente en ese orden. Cada uno tiene solo una mascota: canario, gato, loro y perro. Se sabe que:

- Arturo no tiene el canario ni vive en Breña.
- El dueño del loro vive en Ate.
- Carlos tiene el perro.
- El dueño del gato vive en Breña y es muy amigo de Dante.

9. ¿Quién es el dueño del canario?

   A) Arturo B) Bruno C) Carlos
   D) Dante E) No se puede determinar

10. ¿Quién vive en Lince?

   A) Arturo B) Bruno C) Carlos
   D) Dante E) No se puede determinar

11. La relación correcta es:

   A) Breña - perro B) Bruno - loro
   C) Bruno - gato D) Lince - canario
   E) Comas - perro

12. Para determinar con seguridad dónde vive cada uno y qué mascotas tienen, es suficiente saber que:

   I. Carlos vive en Lince.
   II. Dante no tiene al loro.

   A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
   B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
   C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
   D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
   E) Se necesitan más datos.

Cinco personas tienen distintas aficiones: fútbol, básquet, vóley, natación y tenis, y gustan de colores diferentes: azul, rojo, blanco, negro y verde. Se sabe que:

- Brenda no practica vóley ni le gusta.
- La basquetbolista no gusta del rojo.
- Ada no practica básquet.
- Quien practica vóley gusta del blanco.
- A Diana no le gusta los deportes en los que se use la pelota.
- Emma y Carla no practican básquet ni vóley.
- A la nadadora le gusta el verde.

13. ¿Qué afición tiene Ada?

   A) Fútbol B) Vóley C) Básquet
   D) Tenis E) Natación

14. ¿Cuál es el color de Diana?

A) Azul B) Rojo C) Negro
D) Verde E) Blanco

15. ¿A quién, con seguridad le gusta el rojo?

A) Emma B) Carla C) Ada
D) Brenda E) No se puede determinar

16. ¿Cuál de las siguientes es correcta?

A) A Brenda no le gusta los colores oscuros.
B) A la futbolista le gusta el color rojo.
C) Quien practica tenis gusta del blanco.
D) Si Emma es futbolista, Carla es tenista.
E) Si Carla es tenista, no le gusta el rojo.

17. Un cocinero recibe los pedidos de 5 platos:

P, Q, R, S y T. Se sabe que:

A) T debe prepararse previo a Q.

B) R debe prepararse a continuación de Q.

C) Q debe prepararse antes que S.

D) S debe prepararse a continuación de P.

¿Cuál fue el orden en que se prepararon?

A) TQRSP B) PQRST C) TQSRP
D) PTQRS E) TQRPS

NIVEL 3

18. Cuatro amigos viven en la misma calle. Si sabemos que:

A) Miguel vive a la izquierda de Franklin.

B) La casa de Franklin queda junto y a la derecha de la de Fredy.

C) Fredy vive a la izquierda de Mario.

¿Quién vive a la izquierda de los demás?

A) Fredy B) Franklin C) Mario
D) Miguel E) Faltan datos

19. Benjamín es mayor que Ricardo y Arturo. Jhony es menor que Ricardo. Si Arturo está entre Benjamín y Ricardo, entonces se puede afirmar que:

A) Jhony es mayor que Arturo.
B) Arturo es menor que Ricardo.
C) Ricardo es mayor que Arturo.
D) Benjamín es menor que Arturo.
E) Ricardo es menor que Arturo.

20. Cuatro amigos viven en un edificio de cuatro pisos, se sabe que:

– Jaime vive arriba de Hector.

– Juan vive en el tercer pso, abajo de José.

A) 1 y 3 B) 3 y 1 C) 2 y 4
D) 1 y 4 E) 3 y 4

21. Diana es mayor que Teresa y esta es mayor que Paola, además Ana es mayor que Teresa. Podemos afirmar que:

A) Diana es mayor que Ana.
B) Paola es mayor que Diana.
C) Ana es mayor que Paola.
D) No es cierto que Diana es mayor que Teresa.
E) Ana es mayor que Diana.

22. Se tiene un edificio de seis pisos en el cual viven seis personas, A, B, C, D, E y F, cada una en un piso diferente.

Si se sabe que:

– E vive adyacente a C y B.

– Para ir de la casa de E a la de F hay que bajar tres pisos.

– A vive en el segundo piso:

¿Quién vive en el último piso?

A) E B) B C) A D) C E) D

23. La ciudad x tiene más habitantes que la ciudad w. La ciudad w tiene menos habitantes que la ciudad y, pero más que la ciudad z. Si x tiene menos habitantes que y, ¿qué ciudad tiene menos habitantes?

A) Faltan datos B) y C) w
D) z E) x

24. En una carrera compiten cinco amigos. Antony llegó antes que Adolfo, quien llegó en cuarto lugar. Si Arturo llegó inmediatamente después que Roberto, además Arturo llegó después que Antony, y Roberto llegó antes que Timoteo. ¿Quién llegó en segundo lugar?



A) Timoteo B) Adolfo C) Roberto
D) Antony E) Arturo

25. Si se sabe que:

– Teresa es mayor que Susan.

– Selma es menor que Jenny, quien es menor que Teresa.

– Susan es menor que Selma.

¿Quién es la mayor?

A) Teresa B) Susan
C) Faltan datos D) Jenny
E) Selma

26. Tres amigos de nombres, apellidos y ocupaciones diferentes, se reúnen en la casa de uno de ellos. Tenemos, la siguiente información:

I. Samuel no es Mamani.
II. Quispe trabaja de contador.
III. El actor se llama Hugo.
IV. El profesor no es Condori.
V. Uno de los amigos es Carlos.

¿Cuál es el apellido y la ocupación de Samuel?

A) Quispe - Contador B) Condori - Contador
C) Mamani - Actor D) Condori - Actor
E) Quispe - Actor

Claves

NIVEL 1	8. A	15. E	22. E
1. C	NIVEL 2	16. D	23. D
2. A	9. D	17. E	24. C
3. B	10. E	NIVEL 3	25. A
4. D	11. C	18. D	26. A
5. B	12. A	19. E	
6. C	13. B	20. C	
7. C	14. D	21. C	

UNIDAD 3



Analogías en la naturaleza

Las analogías derivan de una profunda observación de elementos de la naturaleza, de los cuales se desean acoger características específicas y reflejarlas en el objeto a diseñar, tomando las cualidades, atributos y habilidades más destacadas, los que se identifican rápidamente por la sociedad o por la cultura. Se pueden también hacer analogías de las comunidades de animales, de plantas o de plagas. El diseño puede implicar igualmente la analogía de una sola parte o pieza, por ejemplo el diseño de trajes para natación, que capturan una cantidad interesante de burbujas para mejorar la flotabilidad y el desempeño en la velocidad, todo esto derivado de la observación, análisis y aplicación de las texturas y el recubrimiento de la piel de los peces. Lo importante es siempre profundizar en lo que se ha de destacar.

Matemática recreativa

Los 4 cuatros mágicos

El problema de los 4 cuatros es uno de los juegos matemáticos más interesantes que se ha encontrado (y por qué no decirlo, uno de los más complicados). Vamos a ver si entre todos conseguimos terminarlo, o al menos llegar lo más lejos posible. Vamos con las reglas:

El objetivo del juego es obtener todos los números naturales del 0 al 100 usando únicamente 4 cuatros. Las operaciones permitidas son las siguientes: suma, resta, multiplicación, división (usar el 44 es válido y en ese caso habríamos utilizado ya dos cuatros), potencias, raíces cuadradas, factoriales. También podemos usar paréntesis como creamos conveniente.

Aunque a todos nos da curiosidad estas cosas, lo ideal sería que cada uno intentara encontrar los resultados sin mirar a ningún sitio. Recuerda que es un juego para pensar un poco y entretenernos, no estamos compitiendo con nadie.

$0 = 4 - 4 + 4 - 4$

$1 = 4 \div 4 + 4 - 4$

$2 = (4 \div 4) + (4 \div 4)$

$3 = ((4 \times 4) - 4) \div 4$

$4 = 4 \times (4 - 4) + 4$

$5 = \sqrt{4} + \sqrt{4} + (4 \div 4)$

$6 = \sqrt{4} \times (4 - 4 \div 4)$

$7 = 4 + 4 - 4 \div 4$

$8 = 4 \times \sqrt{4} + 4 - 4$

$9 = (4 - 4 \div 4)^{\sqrt{4}}$

$10 = 4 \times \sqrt{4} + 4 \div \sqrt{4}$

$11 = 44 \div (\sqrt{4} \times \sqrt{4})$

$12 = (\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}) \times \sqrt{4}$

$20 = (4 \div 4 + 4) \times 4$

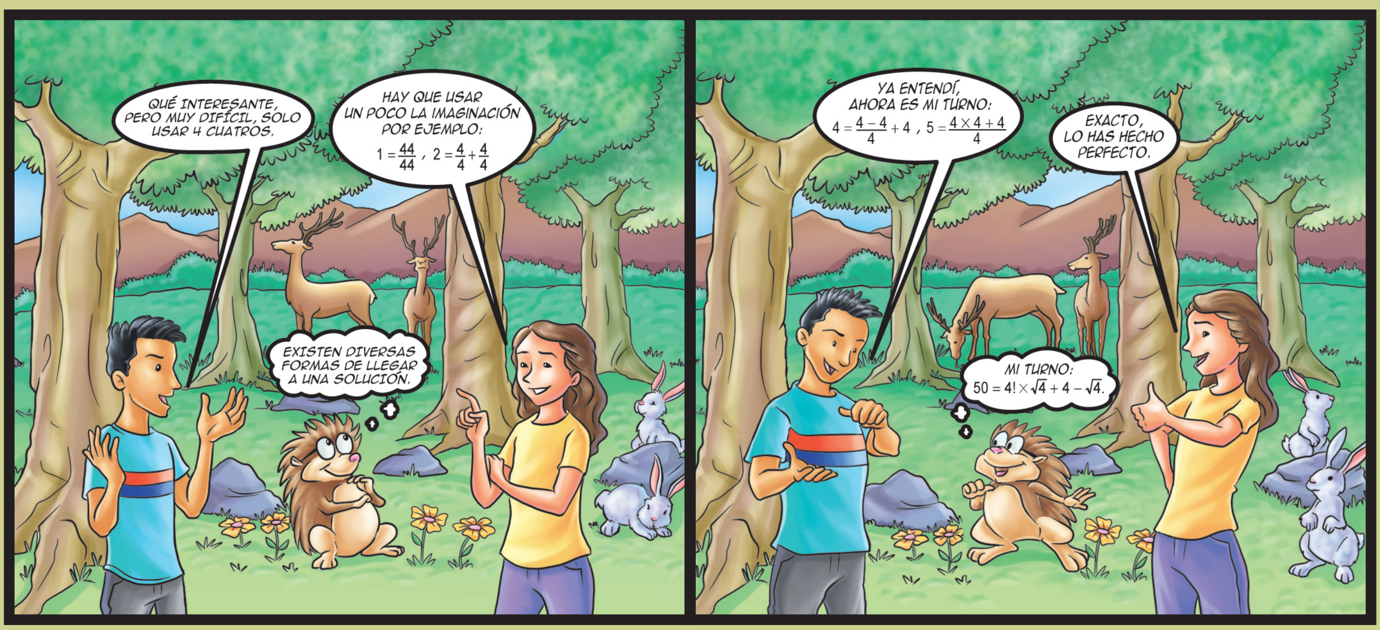
$30 = (4 + 4 \div 4)! \div 4$

$40 = (4!) + (4!) - 4 - 4$

$50 = (4!) \times \sqrt{4} + 4 - \sqrt{4}$

$100 = 4! \times 4 + \sqrt{4} \times \sqrt{4}$

DIÁLOGO



Sucesiones

Recuerda

Una razón aritmética se determina con la diferencia de dos términos consecutivos de una sucesión.



DEFINICIÓN

Llamaremos sucesión a todo conjunto de números y/o letras que se generan a partir de una ley de formación.

Existen tres tipos de sucesiones:

- Sucesión numérica.
- Sucesión alfabética.
- Sucesión gráfica.

Sucesión numérica

Es aquella cuyos elementos son números que respetan una relación entre ellos.

a) Aritmética: mediante suma o resta de cantidades.

Ejemplos:

- 8; 10; 12; 14; 16; (+2, +2, +2, +2)
- 45; 39; 33; 27; 21 (−6, −6, −6, −6)

b) Geométrica: mediante multiplicación o división de cantidades.

Ejemplos:

- 1; 2; 4; 8; 16 (×2, ×2, ×2, ×2)
- 2500; 500; 100; 20; 4 (÷5, ÷5, ÷5, ÷5)

Recuerda

Una razón geométrica se determina con el cociente de dos términos consecutivos de una sucesión.



c) Combinada: cuando varían según las dos anteriores.

Ejemplos:

- 1; 2; 4; 8; 10 (×2, +2, ×2, +2)
- 25; 27; 22; 24; 19 (+2, −5, +2, −5)

d) Alternada: cuando dos sucesiones están intercaladas y cada una tiene una ley de formación independiente.

Ejemplos:

- 15; 10; 16; 12; 17; 14 (15 → 16 → 17: +1, +1; 10 → 12 → 14: +2, +2)
- 6; 8; 10; 11; 14; 14 (6 → 10 → 14: +4, +4; 8 → 11 → 14: +3, +3)

Sucesión alfabética

Los ejercicios de sucesiones alfabéticas se resuelven observando la cantidad de letras que existen entre dos letras consecutivas.

Ejemplos:

- L; N; O; Q; (S)
  M Ñ P R

- A; E; I; M; (P)
  B F J N
  C G K Ñ
  D H L O

> **Nota**
> El alfabeto que se considera en toda sucesión alfabética es aquel que tiene 27 letras.
> A, B, C, D, E, F, G
> H, I, J, K, L, M, N
> Ñ, O, P, Q, R, S, T
> U, V, W, X, Y, Z

Sucesión alfanumérica

Es aquella sucesión en la que se combina el uso de letras y números. Se debe determinar una relación para las letras y otra para los números.

Ejemplos:

- 5; A; 7; D; 9; G; 11; J
  +2 +2 +2
  B E H
  C F I

- C; 7; G; 11; K; 15; Ñ; 19; R; 23
  +4 +4 +4 +4
  D H L O
  E I M P
  F J N Q

- B; 7; F; 10; J; 14; N; 19
  +3 + 4 +5
  C G K
  D H L
  E I M

> **Atención**
> Convencionalmente se conocen como sentido horario y sentido antihorario, lo graficado a continuación:

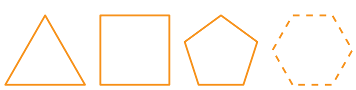
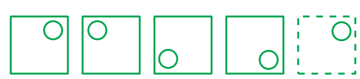




Sucesión gráfica

Está conformada por figuras ordenadas de acuerdo a ciertos criterios que determinan cada figura de la sucesión.

Ejemplos:

- 
- 

Problemas resueltos

1 Halla x en:

4; 6; 24; 30; 240; x

Resolución:

De la sucesión:

4; 6; 24; 30; 240; x

+2 ×4 +6 ×8 +10

+2 +2 +2 +2

∴ x = 240 + 10 = 250

2 Halla x en:

2; 5; 9; 15; 24; x

Resolución:

De la sucesión:

2; 5; 9; 15; 24; x

+3 +4 +6 +9 +13

+1 +2 +3 +4

∴ x = 24 + 13 = 37

3 Halla x en:

2; 3; 4; 6; 12; 36; x

Resolución:

De la sucesión:

2; 3; 4; 6; 12; 36; x

+1 +1 +2 +6 +24 +120

×1 ×2 ×3 ×4 ×5

∴ x = 36 + 120 = 156

4 ¿Qué letra continúa en la sucesión?

D; I; N; R; ...

Resolución:

De la sucesión:

D; I; N; R; ...

E	J	Ñ	S
F	K	O	T
G	L	P	U
H	M	Q	V

4 letras

∴ La letra que sigue es W.

5 ¿Qué letra continúa en la sucesión?

D; H; K; Ñ; Q; ....

Resolución:

Veamos cuántas letras existen entre dos letras de la sucesión:

D; H; K; Ñ; Q; ...

E	I	L	O	R
F	J	M	P	S
G		N		T
3	2	3	2	3

∴ La letra que sigue es U.

6 ¿Qué letra sigue en la sucesión?

U; S; P; M; H; ...

Resolución:

Calculando la cantidad de letras entre dos letras de la sucesión:

U; S; P; M; H; ...

T	Q	N	I	C
	R	Ñ	J	D
		O	K	E
			L	F
				G
1	2	3	4	5

∴ La letra que sigue es B.

7 Completa la sucesión:

E; 7; G; 8; K; 10; M; 13; P; 17; ....; ....

Resolución:

Como se se trata de una sucesión alternada, entonces debemos determinar una relación para las letras y otra para los números.

+1 +2 +3 +4 +5

E; 7; G; 8; K; 10; M; 13; P; 17; (...) (...)

F H I J L N Ñ O Q

1 3 1 3 1

∴ La letra que sigue es R y el número que sigue es: $17 + 5 = 22$

8 Determina la letra que continúa en:

A; E; H; J; N; P; R; ...

Resolución:

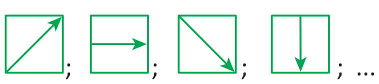
A; E; H; J; N; P; R; (...)

B C D F G I K L M Ñ O Q S T U

3 2 1 3 2 1 3

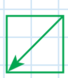
∴ La letra que sigue es V.

9 ¿Qué figura continúa en la siguiente sucesión gráfica?

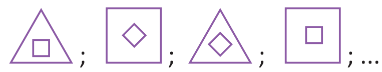


Resolución:

Observando las figuras, notamos que la flecha dentro del cuadrado gira en sentido horario. Por lo tanto, la figura que continúa es:



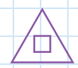
10 Determina la figura que continúa en la siguiente sucesión gráfica:



Resolución:

En la secuencia observamos dos sucesiones: una del triángulo y otra del cuadrado.

En la secuencia del triángulo, la figura interior gira en sentido horario al igual que la figura dentro del cuadrado. Por lo tanto, la siguiente figura es:



11 ¿Qué figura continúa en la secuencia?



Resolución:

Vemos que los segmentos van formando un rectángulo.

Por la tanto, la figura que sigue es:



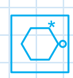
12 Determina la figura que continúa:



Resolución:

Las figuras exteriores al hexágono giran en sentidos contrarios.

Por lo tanto, la figura que continúa es:



Actividades de razonamiento

1. ¿Qué número continúa?
14; 37; 60; 83; ...

A) 108 B) 106 C) 110 D) 109 E) 97

2. Halla x.
10; 12; 14; 16; x

A) 12 B) 19 C) 21 D) 20 E) 18

3. Halla y.
18; 15; 12; y

A) 6 B) 5 C) 8 D) 7 E) 9

4. Halla: x + y
7; 15; 23; x; y

A) 39 B) 70 C) 40 D) 60 E) 31

5. Halla: x – y
25; 19; 13; x; y

A) 6 B) 4 C) 5 D) 2 E) 7

6. Halla 3x.
39; 26; 13; x

A) 12 B) 6 C) 0 D) 9 E) 3

7. Halla x.
7; 10; x; 16; 19

A) 10 B) 12 C) 18 D) 13 E) 16

8. Halla x + y.
3; 11; x; 27; 35; y

A) 62 B) 52 C) 42 D) 82 E) 32

9. Halla y.
39; 32; y; 18; 11

A) 18 B) 25 C) 28 D) 22 E) 20

10. Halla: x – y
57; 46; x; 24; 13; y

A) 30 B) 38 C) 41 D) 33 E) 35

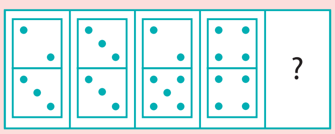
11. Halla a.
19; 20; 22; 25; a

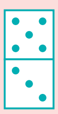
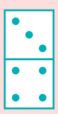
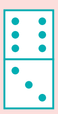
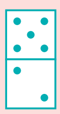
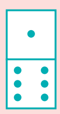
A) 28 B) 29 C) 27 D) 26 E) 30

12. Calcula 2m.
4; 4; 8; 24; m

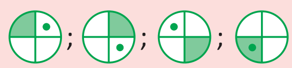
A) 168 B) 172 C) 160 D) 144 E) 192

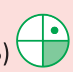
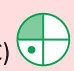
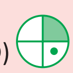
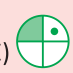
13. ¿Qué figura continúa en la siguiente sucesión?



A)  B)  C)  D)  E) 

14. Determina la figura que continúa.



A)  B)  C)  D)  E) 

Claves

1. B	5. A	9. B	13. C
2. E	6. C	10. D	14. C
3. E	7. D	11. B	
4. B	8. A	12. E	

Reto



¿Qué letra sigue en la siguiente sucesión?
D; N; O; S; A; ...

Rpta.: J

Refuerza practicando

NIVEL 1

Halla x en cada uno de los ejercicios.

1. 8; 10; 12; 14; x

A) 15 B) 13 C) 18 D) 20 E) 16

2. 56; 79; 102; 125; x

A) 148 B) 141 C) 136 D) 260 E) 271

3. 16; 23; 30; 37; x

A) 59 B) 51 C) 56 D) 44 E) 46

4. 18; 49; 80; 111; x

A) 140 B) 142 C) 139 D) 156 E) 150

5. 5; 15; 45; 135; x

A) 405 B) 305 C) 315 D) 385 E) 415

6. 18; 36; 72; 144; x

A) 180 B) 288 C) 268 D) 280 E) 360

7. 60; 70; 90; 120; x

A) 130 B) 170 C) 150 D) 140 E) 160

8. 5; 10; 12; 24; 26; x

A) 36 B) 30 C) 28 D) 54 E) 52

9. 5; 8; x; 14; 17

A) 12 B) 17 C) 14 D) 8 E) 11

10. x; 25; 29; 33

A) 3 B) 21 C) 20 D) 9 E) 8

11. Halla: x – y

x; 23; 17; 11; y

A) 17 B) 20 C) 24 D) 25 E) 18

12. Halla la letra que continúa en la sucesión alfabética.

C; E; G; I; K; ...

A) R B) B C) H D) M E) N

NIVEL 2

Halla x en cada uno de los ejercicios:

(13) 481; 467; 453; 439; x

A) 431 B) 398 C) 378 D) 425 E) 416

(14) 89; 87; 83; 77; x

A) 60 B) 76 C) 77 D) 81 E) 69

(15) 491; 521; 553; 587; x

A) 623 B) 630 C) 640 D) 602 E) 660

(16) 864; 824; 786; 750; x

A) 680 B) 642 C) 688 D) 716 E) 741

(17) 46; 58; 72; 88; x

A) 90 B) 100 C) 110 D) 106 E) 112

(18) 28; 21; 63; 56; 168; x

A) 160 B) 171 C) 161 D) 191 E) 199

(19) 40; 43; 49; 58; x

A) 70 B) 60 C) 64 D) 66 E) 65

(20) 9; 9; 18; 54; x

A) 216 B) 108 C) 104 D) 98 E) 120

(21) Halla la letra que continúa.

C; F; I; L; ...

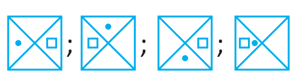
A) G B) R C) S D) T E) Ñ

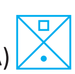
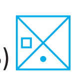
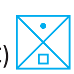
(22) Halla la letra que continúa:

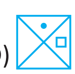
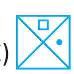
A; D; G; J; ...

A) N B) M C) Q D) O E) R

(23) Halla la figura que continúa en la siguiente sucesión:

 ; ...

A)  B)  C) 

D)  E) 

NIVEL 3

Halla x en cada uno de los ejercicios:

(24) 12; 13; 15; 16; 18; x

A) 23 B) 21 C) 20 D) 19 E) 16

(25) 15; 13; 18; 16; 21; 19; x

A) 22 B) 24 C) 23 D) 25 E) 27

(26) 128; 149; 171; 194; 218; x

A) 243 B) 321 C) 371 D) 253 E) 230

(27) 21; 28; 37; 48; 61; x

A) 76 B) 75 C) 81 D) 84 E) 87

(28) 11; 22; 25; 50; 53; x

A) 116 B) 106 C) 84 D) 89 E) 67

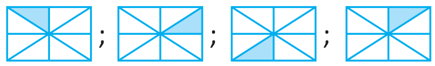
(29) 4; 4; 8; 24; x

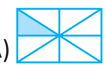
A) 86 B) 96 C) 112 D) 48 E) 72

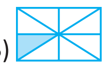
(30) 4; 4; 6; 18; 22; x

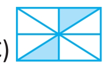
A) 40 B) 48 C) 110 D) 120 E) 53

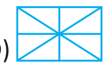
(31) Determina la figura que continúa:

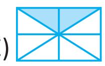
 ; ...

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

(32) Halla la letra que continúa:

B; D; H; J; ...

A) M B) X C) Z D) S E) T

Claves

NIVEL 1	8. E	15. A	23. D	30. C
1. E	9. E	16. D	NIVEL 3	31. B
2. A	10. B	17. D	24. D	32. D
3. D	11. C	18. C	25. B	
4. B	12. D	19. A	26. A	
5. A	NIVEL 2	20. A	27. A	
6. B	13. D	21. E	28. B	
7. E	14. E	22. B	29. B	

Numeración

DEFINICIÓN

Es un conjunto de reglas y principios que sirven para una buena lectura y escritura de los números.

BASE DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

Base	Sistema	Cifras a utilizar
2	Binario	0; 1
3	Ternario	0; 1; 2
4	Cuaternario	0; 1; 2; 3
5	Quinario	0; 1; 2; 3; 4
6	Senario	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	Heptanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6
8	Octonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
9	Nonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
10	Decimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
11	Undecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10
12	Duodecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11
16	Hexadecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15

REPRESENTACIÓN LITERAL DE LOS NÚMEROS

Ejemplos:

- Númeral de 2 cifras:
  $\overline{ab}$: 10; 11; 12; ...; 99
- Numeral de 3 cifras:
  $\overline{abc}$: 100; 101; 102; ...; 999
- Numeral de 4 cifras:
  $\overline{abcd}$: 1000; 1001; 1002; ...; 9999

Numeral capicúa

Es aquel cuyas cifras equidistantes de los extremos son iguales; es decir se lee igual por ambos lados.

Ejemplos:

$\overline{aba}$: 121; 131; ...

$\overline{abba}$: 2332; 3443; ...

ORDEN DE UNA CIFRA

4	3	2	1	0	← Orden
7	2	3	5	6	

Nota

- En todo sistema de numeración se utiliza la cifra cero.
- La base de un sistema de numeración es un número entero positivo mayor que 1.

Atención

Se denomina cifra significativa a cualquier cifra diferente de cero.

Ejemplos:

- Base 10: 37; 858; etc.
- Base 2: $10_{(2)}$; $11_{(2)}$; $1011_{(2)}$; etc.
- Base 6: $53_{(6)}$; $3102_{(6)}$; etc.



Observación

Toda cifra que forma parte de un numeral es un número natural menor que la base. Así en el sistema de base "n" se pueden utilizar "n" cifras diferentes las cuales son:

0; 1; 2; 3; ...; (n – 1)

Cifra máxima: (n – 1)

Cifras significativas: 1; 2; 3; ...; (n – 1)



VALOR ABSOLUTO Y RELATIVO DE UNA CIFRA

- Valor absoluto (VA). Es el valor que toma como símbolo o figura.
- Valor relativo (VR). Es el valor que toma de acuerdo a su posición o al orden que ocupa.

Ejemplo:

En el numeral 675 $\Rightarrow$
$VA(5) = 5;\; VR(5) = 5 \times 10^0$
$VA(7) = 7;\; VR(7) = 7 \times 10^1$
$VA(6) = 6;\; VR(6) = 6 \times 10^2$

Observación

De manera práctica, para hallar el valor relativo de una cifra se multiplica dicha cifra por la base elevada al número de cifras que siguen a la derecha de esta.



DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

Todo numeral se puede expresar como la suma de los valores relativos de cada una de sus cifras.

Ejemplos:

- $375 = 3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 5$
- $352_{(8)} = 3 \times 8^2 + 5 \times 8 + 2$
- $4528_{(9)} = 4 \times 9^3 + 5 \times 9^2 + 2 \times 9 + 8$

También se puede descomponer en bloques:

$\overline{abcd} = \overline{ab} \times 10^2 + \overline{cd}$

$\overline{abcabc}_{(n)} = \overline{abc}_{(n)} \times n^3 + \overline{abc}_{(n)} = \overline{abc}_{(n)}(n^3 + 1)$

$\overline{aabbcc} = \overline{aa} \times 10^4 + \overline{bb} \times 10^2 + \overline{cc}$

CONVERSIÓN DE SISTEMAS DE NUMERACIÓN

1.er caso: de base "m" a base 10

Método I: Ruffini

Ejemplo: convierte $2134_{(6)}$ a base 10.

	2	1	3	4
6	↓	12	78	486
	2	13	81	490

$\therefore\; 2134_{(6)} = 490$

Método II: descomposición polinómica

Ejemplo: convierte $2134_{(6)}$ a base 10.

$2134_{(6)} = 2 \,.\, 6^3 + 1 \,.\, 6^2 + 3 \,.\, 6 + 4$

$\therefore\; 2134_{(6)} = 490$

Recuerda

A mayor número le corresponde menor base y a menor número le corresponde mayor base.

Sea: $\overline{abc}_{(x)} = \overline{mnp}_{(y)}$

Si: $\overline{abc} > \overline{mnp}$; $x < y$

Si: $\overline{abc} < \overline{mnp}$; $x > y$



2.° caso: de base 10 a base "n"

Método: divisiones sucesivas

Ejemplo: convierte 426 a base 5.

426 | 5
425 | 85 | 5
(1) | 85 | 17 | 5
(0) | 15 | (3)
(2)

$\therefore\; 426 = 3201_{(5)}$

Problemas resueltos

1 Si: $\overline{mnp}_{(8)} = 487_{(9)}$
Halla: $m + n + p$

Resolución:

Para hallar los valores de m, n y p debemos convertir el número $487_{(9)}$ a base 8.

- $487_{(9)}$ a base 10.

$487_{(9)} = 4 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 + 7$
$= 324 + 72 + 7$
$= 403$

- Ahora 403 a base 8:

403 | 8
400   50 | 8
(3)   48   (6)
     (2)

$403 = 623_{(8)}$

Luego: $\overline{mnp}_{(8)} = 623_{(8)}$
$m = 6;\ n = 2;\ p = 3$

$\therefore\ m + n + p = 11$

2 Sabiendo que los numerales $\overline{10a}_{(4)}$ $\overline{2bc}_{(a)}$ y $\overline{bb}_{(c)}$; están correctamente escritos y a, b y c son cifras diferentes. Halla a + b + c.

Resolución:

$\overline{10a}_{(4)};\ \overline{2bc}_{(a)};\ \overline{bb}_{(c)}$

Sabemos que toda cifra es menor que su respectiva base.

$a < 4\ ;\ c < a;\ b < c\ ;\ 0 < b$

Ordenando: $0 < b < c < a < 4$
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
$1 \quad 2 \quad 3$

$\therefore\ a + b + c = 6$

3 Halla a +b; si:
$15425_{(a)} = \overline{a1}_{(b)} \times \overline{b3}_{(8)}$

Resolución:

Se sabe que toda cifra que forma parte de un numeral es menor que su base.

Luego: $5 < a\ ;\ a < b;\ b < 8$

Ordenado: $5 < a < b < 8$
$\downarrow \quad \downarrow$
$6 \quad 7$

$\therefore\ a + b = 13$

4 Si: $1122_{(3)} = \overline{abcdef}_{(n)}$
Halla: $a + b + c + d + e + f + n$

Resolución:

Sabemos que a mayor numeral aparente le corresponde menor base y viceversa.

$\ \ -\qquad\qquad +$
$1122_{(3)} = \overline{abcdef}_{(n)}$
$\qquad +\qquad\qquad -$

$n < 3 \Rightarrow n = 2$

Luego: $1122_{(3)} = \overline{abcdef}_{(2)}$

Convirtiendo $1122_{(3)}$ a base 2:

- $1122_{(3)}$ a base 10:

$1122_{(3)} = 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$
$1122_{(3)} = 27 + 9 + 6 + 2$
$1122_{(3)} = 44$

- Ahora 44 a base 2:

44 | 2
44   22 | 2
(0)   22   11 | 2
   (0)   10   5 | 2
     (1)   4   2 | 2
       (1)   2   (1)
         (0)

$44 = 101100_{(2)}$

Luego: $\overline{abcdef}_{(2)} = 101100_{(2)}$

$a = 1;\ b = 0;\ c = 1;\ d = 1;\ e = 0;\ f = 0$

$\therefore\ a + b + c + d + e + f + n = 5$

5 Halla la base del sistema de numeración que cumple: $[26_{(n)}]^2 = 710_{(n)}$

Resolución:

Descomponiendo polinómicamente:

$(2n + 6)^2 = 7 \cdot n^2 + n$

$4n^2 + 24n + 36 = 7n^2 + n$

$3n^2 - 23n - 36 = 0$

$3n \qquad +4$
$\ n \qquad -9$

$(3n + 4)(n - 9) = 0$

$3n + 4 = 0 \quad \vee \quad n - 9 = 0$

$n = -\frac{4}{3} \quad \vee \quad n = 9$

$\therefore\ n = 9$

6 ¿En qué sistema de numeración el mayor numeral capicúa de 2 cifras es 17 veces el menor numeral capicúa de igual cantidad de cifras?

Resolución:

Sea "n" la base.

Mayor numeral capicúa de 2 cifras: $\overline{(n-1)(n-1)}_{(n)}$

Menor numeral capicúa de 2 cifras: $11_{(n)}$

Por dato: $\overline{(n-1)(n-1)}_{(n)} = 17 \times 11_{(n)}$

$n^2 - 1 = 17(n+1)$

$\cancel{(n+1)}(n-1) = 17\cancel{(n+1)}$

$n - 1 = 7$

$\therefore\ n = 8$

7 Un número en base "n" se expresa como 157. ¿Cómo se expresará en base (n + 2)?

Resolución:

Convirtiendo $157_{(n)}$ a base (n + 2):

- $157_{(n)}$ a base 10:
  $157_{(n)} = n^2 + 5n + 7$
- Ahora $n^2 + 5n + 7$ a base n + 2:

$$\begin{array}{r|l}
n^2 + 5n + 7 & n+2 \\
-n^2 - 5n - 6 & n+3 \quad | \ n+2 \\
\textcircled{1} & -n-2 \qquad \textcircled{1} \\
 & \ \ \textcircled{1}
\end{array}$$

$\therefore\ 157_n = 111_{(n+2)}$

8 El mayor número de 3 cifras diferentes en cierto sistema de numeración, convertido a base 6 es 313. Halla la base de dicho sistema.

Resolución:

Sea "n" la base.

Mayor número de 3 cifras diferentes:

$\overline{(n-1)(n-2)(n-3)}_{(n)}$

Por dato: $\overline{(n-1)(n-2)(n-3)}_{(n)} = 313_{(6)}$

Descomponiendo polinómicamente:

$(n-1)n^2 + (n-2)n + n - 3 = 3 \,.\, 6^2 + 1 \,.\, 6 + 3$

$n^3 - \cancel{n^2} + \cancel{n^2} - 2n + n - 3 = 108 + 6 + 3$

$n^3 - n - 3 = 117$

$n^3 - n = 120$

$n(n^2 - 1) = 120$

$n(n-1)(n+1) = 4 \times 5 \times 6$

$(n-1)\ n\ (n+1) = 4 \times 5 \times 6$

$\therefore\ n = 5$

9 Halla a + b + n. Si:

$\underbrace{\overline{aa...a}}_{n \text{ cifras}}{}_{(n)} = \overline{b0b0b0b0}_{(2)}$

Resolución:

Es claro que: b = 1; (0 < b < 2)

Entonces: $\underbrace{\overline{aa...a}}_{n \text{ cifras}}{}_{(n)} = 10101010_{(2)}$

Descomponiendo polinómicamente:

$an^{n-1} + an^{n-2} + ... + an + a = 1 \,.\, 2^7 + 1 \,.\, 2^5 + 1 \,.\, 2^3 + 1 \,.\, 2$

$a(\underbrace{n^{n-1} + n^{n-2} + ... + n + 1}) = 170$

$a \,.\, \dfrac{n^n - 1}{n - 1} = 170$

$\downarrow \quad \downarrow$

$2 \quad 4$

$\therefore\ a + b + n = 2 + 1 + 4 = 7$

10 En qué sistema de numeración cuya base es par, hay 72 números de la forma:

$$\overline{ab\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)}$$

Resolución:

Sea "n" la base.

$\overline{ab\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right)}_{(n)}$

$\left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{n}{2} = 72$

$\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} = 72$

$n^2 - 2n = 288$

$n(n-2) = 18 \times 16$

$\therefore n = 18$

Actividades de razonamiento

1. Si: $2379 = \overline{abaa}_{(9)}$, calcula $\sqrt[a+b]{\overline{ab}}$.

A) 8 B) 4 C) 6 D) 10 E) 2

2. El mayor numeral de 3 cifras en base 5, ¿cómo se expresa en base 8?

A) $265_{(8)}$ B) $327_{(8)}$ C) $421_{(8)}$
D) $174_{(8)}$ E) $123_{(8)}$

3. Halla cuántos números de la forma $\overline{ab}$, cumplen que:

$$\overline{ab}_{(9)} = 7(a + b)$$

A) 0 B) 6 C) 2 D) 1 E) 4

4. Halla n + x, si: $245_{(n)} = \overline{14x}_{(11)}$

A) 9 B) 8 C) 11 D) 4 E) 5

5. Si el mayor numeral de 4 cifras en el sistema binario es igual al mayor numeral de 2 cifras en un sistema desconocido, halla dicho sistema.

A) Cuaternario B) Quinario C) Heptal
D) Ternario E) Senario

6. Halla el valor de "a", si $\overline{1a4} = 504_{(n)}$.

A) 2 B) 10 C) 8 D) 4 E) 6

7. Sabiendo que:

$\overline{abc}_{(7)} = 123_{(4)} + 234_{(5)} + 345_{(6)}$

Halla: a + b + c

A) 11 B) 9 C) 8 D) 13 E) 14

8. En qué base se cumple:

$$25 + 34 = 103$$

A) 8 B) 4 C) 5 D) 7 E) 6

9. Halla x en :

$\overline{xy}_{(9)} - \overline{xy}_{(6)} = \overline{1x}_{(8)}$

A) 4 B) 1 C) 6 D) 2 E) 3

10. Sabiendo que:

$\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{c(b+2)}$

Halla: a + b

A) 11 B) 6 C) 2 D) 8 D) 4

11. Determina el valor de B:

$B = 21_{(5)} + 21_{(6)} + 21_{(7)} + ... + 21_{(50)}$

A) 2412 B) 3224 C) 1416
D) 4875 E) 2576

12. Sabiendo que:

$\overline{aba}_{(8)} = 1106_{(n)}$

Halla: a + b

A) 4 B) 3 C) 8 D) 7 E) 9

13. Halla el mayor valor posible que puede tomar "a" si:

$\overline{a1a}_{(b)} = \overline{ab}$

A) 4 B) 6 C) 7 D) 2 E) 8

14. El mayor numeral de 2 cifras diferentes de un sistema desconocido es igual a un numeral capicúa de 3 cifras en base 3. Calcula la base de dicho sistema de numeración.

A) 9 B) 5 C) 7 D) 8 E) 6

Claves

1. E	5. A	9. A	13. D
2. D	6. C	10. C	14. B
3. C	7. A	11. E	
4. B	8. E	12. D	

Reto



Sabiendo que $\overline{ac}_{(b)} = \overline{cb}_{(a+2)}$

Además: a + b + c = 31

Determina el valor de "a".

Rpta.: 7

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Sabiendo que: $\overline{abcd}_{(8)} = 4003$
   Halla: a + b + c + d

   A) 18 B) 20 C) 22 D) 19 E) 21

2. En qué base se cumple:

   $$24 + 35 = 103$$

   A) 9 B) 8 C) 6 D) 5 E) 7

3. Determina cuál de los siguientes números es mayor.

   A) $1010101_{(2)}$ B) $220_{(6)}$ C) $10022_{(3)}$
   D) $1113_{(4)}$ E) $323_{(5)}$

4. Se tiene que: $122122_{(3)} = \overline{xyz}_{(9)}$
   Halla el valor de: x + y + z

   A) 20 B) 14 C) 10 D) 12 E) 17

5. Halla "n", si: $530_{(n)} = 363_{(11)}$

   A) 12 B) 8 C) 10 D) 11 E) 9

6. Halla (a + b) si:

   $$\overline{a(2a)(a+1)}_{(b)} = 1233_{(5)}$$

   A) 9 B) 8 C) 13 D) 10 E) 11

7. Si: $\overline{abbaba}_{(4)} = 3054$
   Halla: a + b

   A) 6 B) 5 C) 7 D) 2 E) 3

8. Halla "a" si: $\overline{25a} = \overline{a75}_{(8)}$

   A) 4 B) 2 C) 1 D) 3 E) 5

9. Halla m . n, si: $\overline{mnn}_{(9)} = \overline{10m3}_{(7)}$

   A) 15 B) 20 C) 12 D) 24 E) 18

10. Si: $\overline{ab} = \overline{ba}_{(4)}$, calcula el valor de $a^3 + b^2$.

    A) 10 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

NIVEL 2

11) Halla cuántos números de la forma $\overline{ab}$, cumplen que: $\overline{ab} = 7(a + b)$

A) 3 B) 6 C) 7 D) 2 E) 4

12) Si se cumple la siguiente igualdad: $\overline{2n6}_{(8)} = \overline{a6b}_{(n)}$
Halla: a + b + n

A) 13 B) 11 C) 8 D) 12 E) 9

13) Halla a + b si se cumple la igualdad:

$$\overline{abb}_{(6)} = \overline{24a}_{(b)}$$

A) 4 B) 8 C) 6 D) 12 E) 10

14) Si: $\overline{aaa}_{(8)} = \overline{100a}_{(6)}$. Halla el valor de a^2.

A) 4 B) 16 C) 1 D) 9 E) 25

15) Si: $\overline{aba}_{(9)} = \overline{(2b)(2b)a}_{(8)}$. Halla: a . b

A) 15 B) 12 C) 20 D) 18 E) 8

16) Halla el valor de "a" si se cumple la siguiente igualdad:

$$\overline{(a+2)(a+3)(a+4)}_{(a+5)} = \overline{(a+1)aa}_{(8)}$$

A) 6 B) 1 C) 5 D) 3 E) 4

17) En qué sistema de numeración la suma del mayor y el menor número de tres cifras es igual 251. Da como respuesta la base del sistema.

A) 8 B) 4 C) 6 D) 7 E) 5

18) Si: $\overline{abb}_{(5)} = \overline{120a}_{(4)}$. Halla: b – a

A) 5 B) 2 C) 3 D) 4 E) 1

19) Si: $\overline{2n4}_{(8)} = \overline{ab6}_{(n)}$. Halla: a + b

A) 7 B) 9 C) 6 D) 8 E) 5

20) Si: $\overline{aaaa}_{(5)} = \overline{(a+2)(a-2)a}$. Halla: $\dfrac{a+2}{a-2}$

A) 2,5 B) 1,5 C) 3 D) 1 E) 2

NIVEL 3

21) Si la siguiente igualdad es correcta, calcula el valor de a:

$$\overline{aaa}_{(8)} = \overline{\left(\frac{a}{2}\right)(2a+1)\left(\frac{a}{2}\right)}$$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 10 E) 6

22) Halla x + y + z, sabiendo que: $\overline{xyz}_{(6)} - \overline{zyx}_{(9)} = 3$

A) 11 B) 14 C) 10 D) 12 E) 13

23) Calcula $\overline{xy}_{(4)}$ en base 10, si: $\overline{xyxy}_{(5)} = 2 \cdot \overline{yx0}_{(11)}$

A) 11 B) 6 C) 13 D) 9 E) 7

24) Si se cumple que un número de tres cifras de la base 3 se escribe con las mismas cifras, pero en orden invertido en base 4. Calcula el producto de sus 3 cifras.

A) 5 B) 3 C) 2 D) 6 E) 4

25) Si el número $\overline{abc3}$ en base 5 se convierte al sistema de base 7, queda expresado con 3 cifras iguales. Halla: b – a

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

26) Si $\overline{ab}_{(4)} = \overline{ba}_{(n)}$, entonces el mayor valor n es:

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) 11

27) Sabiendo que: $\overline{abc}_{(11)} = \overline{cba}_{(7)}$

Halla: a + b + c, si a ≠ 1

A) 7 B) 8 C) 9 D) 11 E) 10

28) Si el numeral $\overline{12ab}$ de la base "n" se escribe como 99 en la base $100_{(n)}$. Halla: a + b + n

A) 12 B) 11 C) 9 D) 8 E) 10

29) Si $\overline{abc}_{\overline{bc}_{(4)}} = \overline{aob}_{(12)}$, donde o es cero.

Halla: a + b + c

A) 5 B) 10 C) 9 D) 6 E) 8

30) Siendo: $\overline{acb}_{(n^3)} = \overline{(c-4)100120c0}_{(n)}$

Donde: a + b + c = 122

Calcula la suma de cifras de $\overline{n\left(\frac{n+1}{2}\right)(2n-1)}_{(c+4)}$

expresado en el sistemal decimal.

A) 17 B) 16 C) 18 D) 15 E) 14

Claves

NIVEL 1		NIVEL 3	
1. B	9. B	17. C	25. B
2. C	10. A	18. E	26. B
3. C	NIVEL 2	19. D	27. A
4. A	11. E	20. C	28. E
5. E	12. B	NIVEL 3	29. D
6. D	13. C	21. B	30. D
7. B	14. D	22. A	
8. D	15. A	23. ,D	
	16. B	24. C	

Analogías y distribuciones numéricas

Nota

Tantear es un modo de calcular un resultado haciendo varios intentos hasta lograrlo.

Atención

Existen muchas posibilidades de combinar operaciones. Por ejemplo, con 10 y 6 se pueden hacer las siguientes operaciones:

- $10 + 6 = 16$
- $10 - 6 = 4$
- $10 \times 6 = 60$
- $\frac{10+6}{2} = 8$
- $\frac{10-6}{2} = 2$
- $(10 + 6) \times 2 = 32$
- $(10 - 6) \times 2 = 8$
- $\frac{10}{2} + 6 = 11$
- $10 + \frac{6}{2} = 13$
- $10^2 - 6 = 94$
- $2 \times 10 - 6 = 14$



ANALOGÍAS NUMÉRICAS

Una analogía numérica es un conjunto de 3 filas de 3 números cada una, donde el número central está entre paréntesis y resulta de operar los números de los extremos.

Ejemplo:

Halla el número que falta:

$$6 \quad (7) \quad 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{6+8}{2} = 7$$

$$11 \quad (10) \quad 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{11+9}{2} = 10$$

$$15 \quad (\ \ ) \quad 17 \quad \Rightarrow \quad \frac{15+17}{2} = 16$$

∴ El número que falta es 16.

DISTRIBUCIONES NUMÉRICAS

Es un conjunto de números que están dispuestos en filas y columnas. Para determinar el número que falta se debe establecer una relación que puede ser horizontal o vertical.

Ejemplo:

¿Qué número falta?

5	6	9	$\Rightarrow 5 + 6 - 2 = 9$
8	9	15	$\Rightarrow 8 + 9 - 2 = 15$
13	18	x	$\Rightarrow 13 + 18 - 2 = 29$

∴ El número que falta es 29.

ANALOGÍAS GRÁFICAS

Es un conjunto de 3 figuras iguales, que tienen dispuestos números de la misma manera en cada figura. El objetivo es hallar el número que falta en la tercera figura.

Ejemplo:

¿Qué número falta?

(6)–[15]–(2) (9)–[39]–(4) (7)–[?]–(6)

$6 \times 2 + 3 = 15$

$9 \times 4 + 3 = 39$

$7 \times 6 + 3 = 45$

∴ El número que falta es 45.

Nota

Las figuras que se emplean son diversas y por lo general son tres, con la 1.ª figura descubrimos las operaciones, con la 2.ª figura verificamos y con la 3.ª figura hallamos el número que falta.

Problemas resueltos

1 ¿Qué número falta en la siguiente analogía?

16	(12)	20
14	(11)	19
22	( )	23

Resolución:

Analizamos cada fila:

1.ª fila: $\frac{16+20}{3} = 12$

2.ª fila: $\frac{14+19}{3} = 11$

3.ª fila: $\frac{22+23}{3} = \boxed{15}$

∴ El número que falta es 15.

2 Halla el número que falta.

12	(14)	8
6	(21)	18
16	( )	5

Resolución:

En cada fila se cumple que:

1.ª fila: $\frac{12}{2} + 8 = 14$

2.ª fila: $\frac{6}{2} + 18 = 21$

3.ª fila: $\frac{16}{2} + 5 = \boxed{13}$

∴ El número que falta es 13.

3 Halla el número que falta:

6	(31)	5
8	(57)	7
10	( )	12

Resolución:

Encontramos una relación conveniente:

1.ª fila: $6^2 - 5 = 31$

2.ª fila: $8^2 - 7 = 57$

3.ª fila: $10^2 - 12 = \boxed{88}$

∴ El número que falta es 88.

4 ¿Qué número falta?

5	(64)	3
7	(121)	4
9	( )	5

Resolución:

Analizamos cada fila:

1.ª fila: $(5+3)^2 = 64$

2.ª fila: $(7+4)^2 = 121$

3.ª fila: $(9+5)^2 = \boxed{196}$

∴ El número que falta es 196.

5 ¿Qué número falta?

14	(5)	11
25	(7)	24
54	( )	27

Resolución:

La relación formada es:

1.ª fila: $\sqrt{14+11} = 5$

2.ª fila: $\sqrt{25+24} = 7$

3.ª fila: $\sqrt{54+27} = \boxed{9}$

∴ El número que falta es 9.

6 ¿Qué número falta?

25	(13)	18
36	(17)	11
49	( )	16

Resolución:

Descubrimos la relación en cada fila:

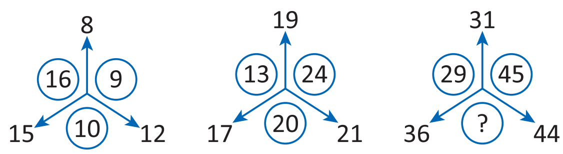
1.ª fila: $\sqrt{25} + 18 = 13$

2.ª fila: $\sqrt{36} + 11 = 17$

3.ª fila: $\sqrt{49} + 16 = \boxed{23}$

∴ El número que falta es 23.

7 ¿Qué número falta?



Resolución:

Analizamos cada figura:

1.ª fila: $15 + 12 + 8 = 16 + 9 + 10$

$35 = 35$

2.ª fila: $17 + 21 + 19 = 13 + 24 + 20$

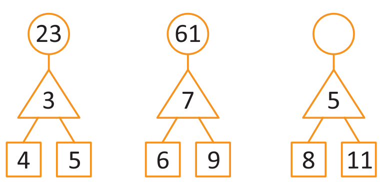
$57 = 57$

3.ª fila: $36 + 44 + 31 = 29 + 45 + ?$

$111 = 74 + ? \Rightarrow ? = 37$

$\therefore$ El número que falta es 37.

8 ¿Qué número falta?



Resolución:

Analizamos cada figura:

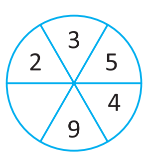
1.ª fila: $4 \times 5 + 3 =$ 23

2.ª fila: $6 \times 9 + 7 =$ 61

3.ª fila: $8 \times 11 + 5 =$ 93

$\therefore$ El número que falta es 93.

9 ¿Qué número falta?



Resolución:

Veamos qué relación existe entre los números que se oponen:

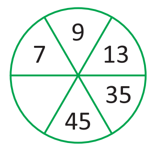
$2^2 = 4$

$3^2 = 9$

$5^2 = 25$

$\therefore$ El número que falta es 25.

10 ¿Qué número falta?



Resolución:

Procedemos de manera análoga al problema anterior:

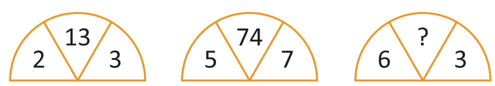
$7 \times 5 = 35$

$9 \times 5 = 45$

$13 \times 5 = 65$

$\therefore$ El número que falta es 65.

11 ¿Qué núnero falta?



Resolución:

Observamos cada figura y obtenemos la siguiente relación:

1.ª figura: $2^2 + 3^2 = 13$

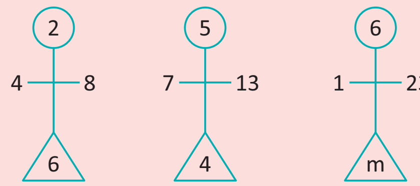
2.ª figura: $5^2 + 7^2 = 74$

3.ª figura: $6^2 + 3^2 = 45$

$\therefore$ El número que falta es 45.

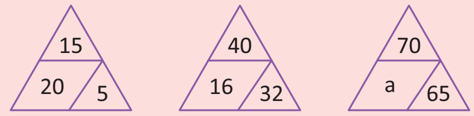
Actividades de razonamiento

1. Halla m.



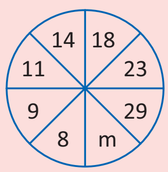
A) 3 B) 0 C) 7 D) 9 E) 4

2. Halla a.



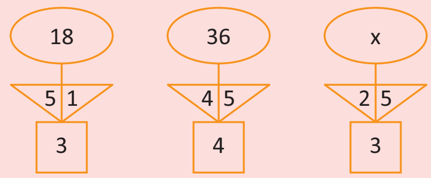
A) 20 B) 10 C) 30 D) 24 E) 25

3. ¿Qué número falta?



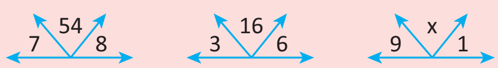
A) 35 B) 36 C) 42 D) 34 E) 40

4. Halla x.



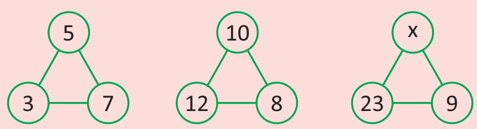
A) 21 B) 26 C) 24 D) 28 E) 30

5. Halla x.



A) 9 B) 12 C) 10 D) 6 E) 7

6. Halla el número que falta:



A) 20 B) 16 C) 13 D) 18 E) 12

7. Halla x.

4	(12)	8
15	(25)	10
24	(x)	13

A) 37 B) 25 C) 28 D) 32 E) 42

8. Halla m.

18	(36)	2
27	(81)	3
32	(m)	4

A) 92 B) 35 C) 82 D) 128 E) 94

9. ¿Qué número falta?

4	(36)	8
5	(42)	9
6	(?)	7

A) 36 B) 39 C) 27 D) 30 E) 42

10. Calcula m.

7	(8)	9
9	(7)	5
1	(m)	5

A) 6 B) 3 C) 4 D) 8 E) 5

11. Halla x.

12	(38)	7
6	(36)	12
9	(x)	2

A) 30 B) 14 C) 22 D) 18 E) 10

12. ¿Qué número falta?

7	(6)	5
12	(5)	8
15	(?)	12

A) 9 B) 8 C) 6 D) 10 E) 7

13. Halla el número que falta.

4	(16)	2
5	(125)	3
2	(?)	4

A) 18 B) 16 C) 17 D) 23 E) 8

14. Halla x.

72	(27)	3
64	(50)	5
53	(x)	7

A) 56 B) 64 C) 60 D) 50 E) 55

Claves

1. E 2. B 3. B 4. A
5. E 6. B 7. A 8. D
9. B 10. B 11. C 12. A
13. B 14. A

Reto



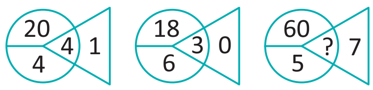
Halla el valor de x en la siguiente analogía:

5	(27)	2
3	(9)	2
4	(x)	1

Rpta.: 27

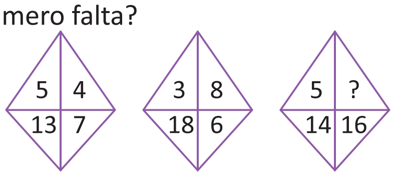
NIVEL 1

1) ¿Qué número falta?



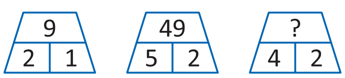
A) 6 B) 5 C) 8 D) 9 E) 4

2) ¿Qué número falta?



A) 4 B) 7 C) 6 D) 8 E) 9

3) ¿Qué número falta?



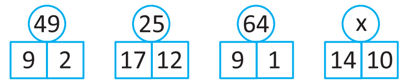
A) 64 B) 32 C) 42 D) 40 E) 36

4) Halla n.



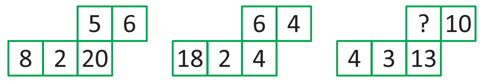
A) 28 B) 32 C) 26 D) 36 E) 34

5) Halla x.



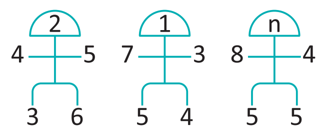
A) 25 B) 36 C) 49 D) 100 E) 16

6) ¿Qué número falta?



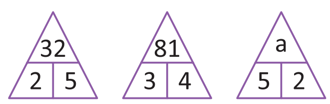
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7) Halla n.



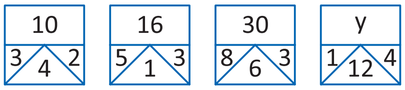
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 4

8) Halla a.



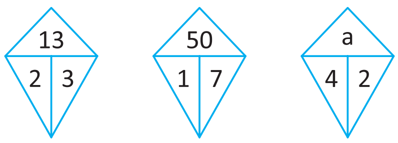
A) 26 B) 28 C) 32 D) 25 E) 36

9. Halla y.



A) 18 B) 20 C) 23 D) 26 E) 16

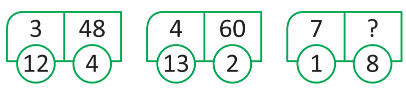
10. Halla a.



A) 22 B) 20 C) 23 D) 26 E) 32

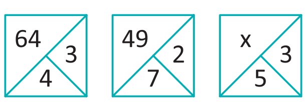
NIVEL 2

11. ¿Qué número falta?



A) 56 B) 58 C) 72 D) 77 E) 63

12. Halla x.



A) 243 B) 81 C) 125 D) 64 E) 25

13. ¿Qué número falta?

60	(25)	10
9	(4)	1
30	( )	4

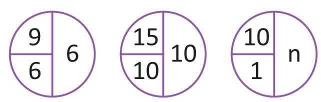
A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 13

14. ¿Qué número falta?

8	(12)	16
7	(25)	43
20	( )	60

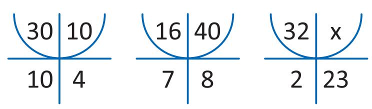
A) 40 B) 30 C) 45 D) 50 E) 59

15. Halla n.



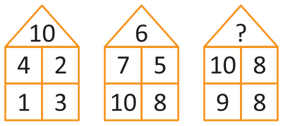
A) 24 B) 20 C) 32 D) 18 E) 36

16. Halla x.



A) 12 B) 16 C) 18 D) 13 E) 14

17. ¿Qué número falta?



A) 8 B) 9 C) 12 D) 16 E) 18

18. ¿Qué número falta?

2	(16)	4
4	(81)	3
5	( )	2

A) 36 B) 32 C) 25 D) 49 E) 56

19. ¿Qué número falta?

4	(64)	3
9	(81)	2
1	( )	5

A) 0 B) 2 C) 1 D) 4 E) 8

20. ¿Qué número falta?

2	(8)	3
5	(32)	6
8	( )	1

A) 10 B) 11 C) 13 D) 14 E) 18

NIVEL 3

21. ¿Qué número falta?

6	(10)	8
9	(4)	1
21	( )	3

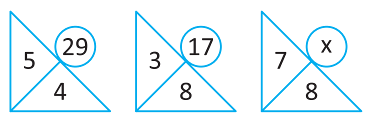
A) 10 B) 11 C) 12 D) 16 E) 15

22. ¿Qué número falta?

5	(26)	1
8	(70)	6
3	( )	11

A) 24 B) 26 C) 30 D) 36 E) 20

23. Halla x.



A) 59 B) 64 C) 57 D) 51 E) 68

24. ¿Qué número falta?

15	(4)	1
8	(5)	17
30	( )	6

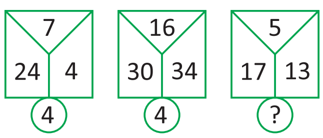
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

25 ¿Qué número falta?

7	(8)	1
20	(5)	5
12	( )	6

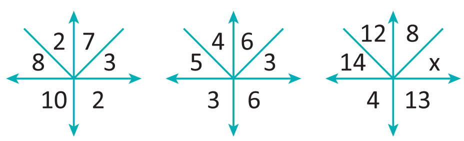
A) 2 B) 6 C) 8
D) 7 E) 3

26 ¿Qué número falta?



A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

27 Halla x.



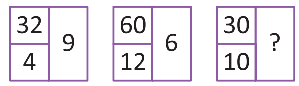
A) 16 B) 12 C) 15
D) 14 E) 18

28 ¿Qué número falta?

3	(16)	1
5	(64)	3
10	( )	2

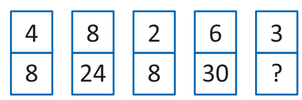
A) 81 B) 169 C) 400
D) 100 E) 144

29 ¿Qué número falta?



A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 4

30 ¿Qué número falta?



A) 20 B) 24 C) 26
D) 32 E) 18

Claves

NIVEL 1
1. B
2. C
3. E
4. C
5. E
6. C
7. B
8. D
9. E
10. B

NIVEL 2
11. E
12. C
13. E
14. A
15. D
16. E
17. A
18. B
19. C
20. A

NIVEL 3
21. A
22. E
23. C
24. B
25. E
26. B
27. E
28. E
29. E
30. E

Leyes de exponentes

DEFINICIÓN

Son aquellas definiciones y teoremas que estudian a los exponentes a través de las operaciones de potenciación y radicación.

POTENCIACIÓN

Es aquella operación matemática donde dados dos elementos llamados base (b) y exponente (n), se obtiene un tercer elemento llamado potencia (p).

$$b^n = p$$

Donde:

- b: base
- n: exponente
- p: potencia

Recuerda

Ejemplos:

$2^5 = 32$

$3^4 = 81$

$5^3 = 125$



PRINCIPALES EXPONENTES

Exponente natural

Nos indica el número de veces que se repite una expresión como factor.

$$x^n = \begin{cases} x; \text{ si } n = 1 \\ \underbrace{x.x. \ldots .x}_{\text{"n" veces}}; \ n \geq 2 \end{cases}$$

Exponente cero

Todo número diferente de cero elevado al exponente cero es la unidad.

$$x^0 = 1 \quad ; x \neq 0$$

Exponente negativo

Nos indica que la base diferente de cero se invierte.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad ; x \neq 0$$

Observación

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{7}$$



Teoremas

Multiplicación de bases iguales

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos:

$2^3 . 2^6 = 2^{3+6} = 2^9 = 512$

$3^3 . 3^2 . 3^1 = 3^{3+2+1} = 3^6 = 729$

$5^2 . 5^3 = 5^5 = 3125$

División de bases iguales

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad ; a \neq 0$$

Ejemplos:

$\frac{3^{21}}{3^{16}} = 3^{21-16} = 3^5 = 243$

$\frac{2^{40}}{2^{29}} = 2^{40-29} = 2^{11} = 2048$

Potencia de una multiplicación

$$(a \,.\, b)^n = a^n .\, b^n$$

Ejemplos:

$(2.3)^3 = 2^3.3^3 = 8 \,.\, 27 = 216$

$(3.5)^2 = 3^2 \,.\, 5^2 = 9.25 = 225$

$(2.5.7)^2 = 2^2.5^2.7^2 = 4.25.49 = 4900$

Potencia de una división

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad ; b \neq 0$$

Ejemplos:

$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$

$\left(\frac{-2}{5}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25}$

Potencia de potencia

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

Ejemplos:

$(2^3)^4 = 2^{3.4} = 2^{12} = 4096$

$(3^2)^3 = 3^{2.3} = 3^6 = 729$

$((5^2)^2)^2 = 5^{2\,.\,2\,.\,2} = 5^8 = 390\,625$

Observación

$(a^m)^n \neq a^{m^n}$

Excepto cuando:

$m = n = 1$

ó

$m = n = 2$



ERRORES FRECUENTES AL APLICAR LEYES DE EXPONENTES

APLICACIÓN INCORRECTA	APLICACIÓN CORRECTA
$2^4.2^5 = 2^{4.5} = 2^{20}$	$2^4 \,.\, 2^5 = 2^{4+5} = 2^9$
$3^4 + 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$	$3^4 + 3^5 = 81 + 243 = 324$
$-3^2 = 9$	$-3^2 = -9$
$\frac{7^2}{7^{-3}} = 7^{2-3} = 7^{-1}$	$\frac{7^2}{7^{-3}} = 7^{2-(-3)} = 7^5$
$(2^3)^2 = 2^9$	$(2^3)^2 = 2^6$
$5^0 = 0$	$5^0 = 1$
$0^0 = 0$	0^0 = no está determinado
$(a+5)^{-1} = a^{-1} + 5^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{5}$	$(a+5)^{-1} = \frac{1}{(a+5)}$

Atención

Las expresiones de la forma:

$N^{a^{b^c}}$ (↙)

Se efectúan en el sentido de la flecha.

Ejemplo:

$2^{3^{2^{5^0}}} = 2^{3^{2^1}} = 2^{3^2} = 2^9$

$= 512$



RADICACIÓN

Es aquella operación matemática donde dados dos elementos llamados índice (n) y radicando (a), se obtiene un tercer elemento llamado raíz (b).

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

Donde:
n: índice   a: radicando   b: raíz

Definición

Exponente fraccionario

Todo exponente fraccionario se puede expresar con radicales de la siguiente manera.

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$$

Teoremas

Raíz de una multiplicación

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}$$

Ejemplos:

- $\sqrt{16.25} = \sqrt{16}\,.\sqrt{25} = 4\,.\,5 = 20$
- $\sqrt[3]{27.512} = \sqrt[3]{27}\,.\sqrt[3]{512} = 3\,.\,8 = 24$
- $\sqrt[5]{32.243} = \sqrt[5]{32}\,.\sqrt[5]{243} = 2\,.\,3 = 6$

Raíz de un cociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ ;\ b \neq 0$$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$
- $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$

Raíz de Raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3.2]{729} = \sqrt[6]{729} = 3$
- $\sqrt{\sqrt[5]{1024}} = \sqrt[2.5]{1024} = \sqrt[10]{1024} = 2$

RADICALES SUCESIVOS

$$\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[p]{c}}} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m.n]{b}\,\sqrt[m.n.p]{c}$$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{5\sqrt[5]{7}}} = \sqrt[3]{2}\,.\sqrt[3.4]{5}\,.\sqrt[3.4.5]{7}$
  $= \sqrt[3]{2}\,.\sqrt[12]{5}\,.\sqrt[60]{7}$
- $\sqrt{2\sqrt[3]{8\sqrt[5]{16}}} = \sqrt{2}\,.\sqrt[2.3]{8}\,.\sqrt[2.3.5]{16}$
  $= \sqrt{2}\,.\sqrt[6]{8}\,.\sqrt[30]{16}$

Recuerda

Ejemplos:

$\sqrt{64} = 8$

$\sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt[5]{243} = 3$





Observación

$\sqrt[x]{a^y} = \sqrt[xk]{a^{yk}}$

$\sqrt[x]{a^y} = \sqrt[x/k]{a^{y/k}}$

$\sqrt[x]{a^y} = (\sqrt[x]{a})^y$

$(\sqrt[x]{a^y})^z = \sqrt[x]{a^{yz}}$

Importante

Si a = b = c = x, entonces:

$\sqrt[m]{x^{\alpha}\sqrt[n]{x^{\beta}\sqrt[p]{x^{\theta}}}} = \sqrt[m.n.p]{x^{(\alpha n+\beta)p+\theta}}$

Ejemplo:

$\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^5\sqrt[5]{x}}} = \sqrt[3.4.5]{x^{(2.4+5)5+1}}$

$= \sqrt[60]{x^{66}}$

$= \sqrt[10]{x^{11}}$



Problemas resueltos

1 ¿Cuál es la diferencia de edades entre Jorge y Luis, si Jorge tiene 32 años y la edad de Luis está representada por "L"?

$$L = \frac{(2^2)^4.(2^3)^4}{(2^2)^8}$$

Resolución:

Aplicamos los teoremas de potenciación:

$$L = \frac{2^8.2^{12}}{2^{16}} = \frac{2^{20}}{2^{16}} = 2^4$$

Luego: L = 16

$\therefore$ Diferencia = 32 – 16 = 16 años

2 Reduce:

$$M = \frac{(xy)^2[x^2y^2]^4[x^3y^3]^3}{(xy)^{18}}$$

Resolución:

Aplicamos las propiedades:

$$M = \frac{x^2y^2.x^8y^8.x^9y^9}{x^{18}y^{18}}$$

$$M = \frac{x^{19}y^{19}}{x^{18}y^{18}}$$

$\therefore$ M = xy

3 Simplifica:

$$M = \frac{10^5.6^5.24}{48^2.15^4.4^3}$$

Resolución:

Descomponemos cada número como producto de factores primos.

$$M = \frac{(2.5)^5.(2.3)^5.2^3.3}{(2^4.3)^2.(3.5)^4.(2^2)^3}$$

Aplicamos las propiedades:

$$M = \frac{2^5.5^5.2^5.3^5.2^3.3}{2^8.3^2.3^4.5^4.2^6}$$

Agrupando convenientemente:

$$M = \frac{2^{13}.3^6.5^5}{2^{14}.3^6.5^4}$$

$$M = 2^{-1}.5 = \frac{5}{2}$$

$\therefore$ M = 2, 5

4 Efectúa:

$$E = 3^{2^{2^{7^{0^{9^2}}}}}$$

Resolución:

Este tipo de problemas se resuelve de arriba hacia abajo:

$$E = 3^{2^{2^{7^{0^{9^2}}}}} \quad = 3^{2^{2^{7^0}}} \quad = 3^{2^{2^1}}$$

Luego:

$$E = 3^{2^{2^1}} \quad = 3^{2^2} \quad = 3^4$$

$\therefore$ E = 81

5 Simplifica:

$$F = \left\{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]^{-1} + \left[2 - \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{\frac{1}{6}}$$

Resolución:

$$F = \left\{\left[\frac{1}{25} + \left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^{-1} + \left[2 - \frac{5}{3}\right]^{-1}\right\}^{\frac{1}{6}}$$

$$F = \left\{\left[\frac{1}{25} + \frac{4}{25}\right]^{-1} + \left[\frac{1}{3}\right]^{-1}\right\}^{\frac{1}{6}}$$

$$F = \left\{\left[\frac{1}{5}\right]^{-1} + 3\right\}^{\frac{1}{6}} = \{5 + 3\}^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{6}}$$

$\therefore$ $F = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$

6 Simplifica:

$$K = \left(-\frac{1}{8}\right)^{-27^{-3^{-1}}}$$

Resolución:

Aplicando la definición de exponente negativo.

$$K = \left(-\frac{1}{8}\right)^{-27^{-3^{-1}}} = \left(-\frac{1}{8}\right)^{-27^{-\frac{1}{3}}}$$

$$= \left(-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= (-8)^{\frac{1}{3}}$$

$\therefore$ K = −2

7 Si: $P = 3^4(9^8)$

Halla el valor de: $E = \sqrt[5]{P}$

Resolución:

Hallamos P:

$P = 3^4(3^2)^8 = 3^4 \,.\, 3^{16}$

Luego: $P = 3^{20}$

Reemplazamos $P = 3^{20}$ en E:

$E = \sqrt[5]{P} = \sqrt[5]{3^{20}} = 3^4$

$\therefore$ E = 81

8 Reduce:

$$L = \sqrt[7]{\sqrt[3]{\left[\left(\sqrt[3]{m}\right)^2\left(\sqrt[3]{m}\right)\right]^{21}}}$$

Resolución:

Aplicamos producto de bases iguales:

$$L = \sqrt[7]{\sqrt[3]{\left[\left(\sqrt[3]{m}\right)^3\right]^{21}}}$$

$$L = \sqrt[21]{m^{21}}$$

$\therefore$ L = m

9 Calcula "m" en:

$$\sqrt[3]{\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x^m}} = x^5;\ x > 0$$

Resolución:

Elevamos al cubo:

$$\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x^m} = (x^5)^3$$

$$\sqrt{x^2}\,.\,\sqrt{x^m} = x^{15}$$

$$x\,.\,\sqrt{x^m} = x^{15}$$

$$\sqrt{x^m} = x^{14}$$

Elevamos al cuadrado:

$$x^m = \left(x^{14}\right)^2$$

$$x^m = x^{28}$$

$\therefore$ m = 28

10 Simplifica:

$$P = \sqrt[2n]{\frac{80^n + 16^n}{20^n + 4^n}}$$

Resolución:

Descomponemos cada número como producto de sus factores primos:

$$P = \sqrt[2n]{\frac{(2^4.5)^n + (2^4)^n}{(2^2.5)^n + (2^2)^n}}$$

$$P = \sqrt[2n]{\frac{2^{4n}.5^n + 2^{4n}}{2^{2n}.5^n + 2^{2n}}}$$

$$P = \sqrt[2n]{\frac{2^{4n}(5^n + 1)}{2^{2n}(5^n + 1)}} = \sqrt[2n]{2^{2n}}$$

$\therefore$ P = 2

Actividades de razonamiento

1. Efectúa

$$\frac{27^{2a+\frac{5}{3}}}{9^{3a+2}}$$

A) 1 B) 3 C) 2 D) 5 E) 4

2. Calcula:

$$E = \frac{(2 \,.\, 3^2)^{-1}}{\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}(3)^{-2}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 4

3. Marca verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. $(-4)^{1/2} = -2$ ( )

II. $2^0 = 0$ ( )

III. $2^3 = 6$ ( )

A) VFV B) VVF C) FFF D) VVV E) VFF

4. Calcula:

$$M = 27^{3^{-1}} + 9^{2^{-1}} + 36^{2^{-1}} + 16^{4^{-1}}$$

A) 12 B) 15 C) 16 D) 14 E) 10

5. Efectúa:

$$A = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \left\{\left[\left(38\sqrt{74}\right)^5\right]^0\right\}^{18}$$

A) 6 B) 12 C) 10 D) 8 E) 14

6. Reduce:

$$\left[\sqrt[7]{x^2 \,.\, \sqrt[5]{x^4}}\right] \div \left[\sqrt[10]{x} \,.\, \sqrt[35]{x^2}\right]$$

A) $x^{\frac{17}{70}}$ B) $x^{\frac{13}{14}}$ C) $x^{\frac{1}{70}}$ D) $x^{\frac{3}{14}}$ E) $\sqrt[14]{x}$

7. Simplifica:

$$R = \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x^7}}}\right) \div \sqrt[12]{x^{-7}}$$

A) $x^{\frac{4}{3}}$ B) $x^{\frac{1}{8}}$ C) $x^{\frac{4}{8}}$ D) $x^{\frac{3}{8}}$ E) $x^{\frac{7}{8}}$

8. Reduce:

$$A = 3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x$$

A) 3 B) $13(3^x)$ C) 3x D) 9 E) 27

9. Efectúa:

$$E = \frac{21^6 . 35^3 . 80^3}{15^4 . 14^9 . 30^2}$$

A) 2 B) 5 C) 7 D) 3 E) 4

10. Halla el valor de J.

$$J = 16^{16^{-32^{-5^{-1}}}}$$

A) 2 B) 3 C) 9 D) 5 E) 16

11. Reduce:

$$M = \frac{3^{n+3} - 3^{n+1}}{3^n}$$

A) 27 B) 24 C) 3n D) 9 E) 3

12. Ejecuta:

$$C = \frac{x^{3m+5} . x^{2m-1}}{x^{5+5m}}$$

A) x^2 B) x^{-2} C) x^{-1} D) 1 E) x^3

13. Simplifica:

$$B = \frac{5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}}{5^n}$$

A) 5 B) 50 C) 25 D) 5n E) 31

14. Simplifica:

$$H = \frac{2^{n+13} + 2^{n+14}}{2^{n+14} + 2^{n+15}}$$

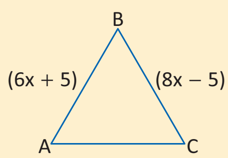
A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 2^{-1}

Claves

1. B	5. B	9. A	13. E
2. A	6. A	10. A	14. E
3. C	7. E	11. B	
4. D	8. B	12. C	

Reto

En el triángulo isósceles mostrado: AB = BC





Halla el perímetro del triángulo si:

$$AC = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{64}{729}\right)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}\right]^2$$

Rpta.: 95

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Halla: $27^{-9^{-2^{-1}}}$

A) 3 B) 1/3 C) 2/3 D) 2 D) 1/2

2. Calcula:

$$G = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} - 3^{-2} + \frac{2^{-3}}{3^{-2}}$$

A) 8/9 B) 1/9 C) 1/8 D) 8 E) 9/8

3. Reduce:

$$E = 256^{8^{-3^{-1}}} - 81^{4^{-2^{-1}}}$$

A) 1 B) 3 C) 6 D) 7 E) 9

4. Efectúa:

$$M = \left(\left((6561)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

A) $\sqrt[6]{3}$ B) $\sqrt[8]{3}$ C) $\sqrt[8]{27}$ D) $\sqrt{3}$ E) 3

5. Simplifica:

$$P = \frac{5\sqrt{8} + 9\sqrt{32}}{\sqrt{128}}$$

A) $\frac{20}{4}$ B) $\frac{21}{4}$ C) $\frac{22}{4}$ D) $\frac{23}{4}$ E) $\frac{24}{4}$

6. Halla el exponente final de "x" en la siguiente expresión:

$E = \sqrt{x} \,.\, \sqrt[3]{x^2} \,.\, \sqrt[4]{x^3}$

A) 19/12 B) 25/12 C) 29/12
D) 21/12 E) 23/12

7. Al simplificar: $E = \dfrac{5^{2n+1} - 25^{n+1}}{5^{2n} \,.\, 5}$

Se obtiene:

A) -100 B) 5^n C) -20
D) -5^n E) $10.\ 5^n$

8. Simplifica:

$$A = \frac{2^{n+4} - 2(2^n)}{2(2^{n+3})}$$

A) 7/2 B) $1 - 2^n$ C) -2^{n+1} D) 7/8 E) 7/4

NIVEL 2

9. Calcula: $R = 64^{9^{-2^{-1}}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. Reduce: $P = \sqrt[3]{64^{2^{-1}} + 16^{2^{-2}} - 8^{3^{-1}}}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. Simplifica: $\sqrt[3]{x^2 . \sqrt{x^5}} . \sqrt{\sqrt[3]{x^9}}$

A) 1 B) x C) $\sqrt{x}$ D) x^2 E) x^3

12. Calcula: $M = \sqrt[8]{4} . \sqrt{\sqrt[4]{2^{-20}}} . 2^{4^{-1}}$

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 4 D) $\frac{1}{4}$ E) 1

13. Reduce:

$$M = \sqrt[5]{243^{-4^{-2^{-1}}}} . \sqrt[3]{27^{-4^{-2^{-1}}}}$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{27}$ D) $\frac{1}{81}$ E) $\frac{1}{243}$

14. Calcula:

$$E = \left(\frac{9}{4}\right)^{-0,5} - \left(\frac{625}{81}\right)^{0,25} + 81^{0,25}$$

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

15. Reduce:

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} - \left(\frac{1}{64}\right)^{-3^{-1}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

16. Calcula:

$$R = \sqrt[n^2]{\frac{9^{n^2+2} + 3^{2n^2+2}}{90^{n^2+1}}}$$

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{11}$

NIVEL 3

17. Reduce:

$$B = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}}$$

A) 3 B) 9 C) 27 D) 81 E) 243

18. Simplifica:

$$R = \left[\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\right]^{2^3}$$

A) x^5 B) x^6 C) x^7 D) x^8 E) x^9

19. Simplifica:

$$C = \sqrt[a+b]{\frac{x^{a}.y^{-b}}{x^{-b}.y^{a}}}$$

A) $\frac{y}{x}$ B) $\frac{x}{y}$ C) $\frac{x^2}{y}$ D) $\frac{y^2}{x}$ E) 1

20. Si: $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^{8}.\sqrt[4]{x^{7}}}{\left(\sqrt{x^{3}}\right)^{5}}}$

Calcula f(16).

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

21. Simplifica:

$$P = \left(\frac{\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}} \div \sqrt[8]{x}}{\frac{\sqrt[3]{x}.\sqrt[9]{x}}{\sqrt{x}}}\right)^{72}$$

A) x B) x^2 C) x^3 D) x^4 E) x^5

22. Calcula:

$$M = \sqrt[a]{\frac{20^{a+1}}{4^{a+2} + 2^{2a+2}}}$$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

23. Reduce:

$$E = \frac{\sqrt{x.\sqrt{x.\sqrt{x.\sqrt{x}}}}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^{-1}}}}}}$$

A) 1 B) x C) x^2
D) x^3 E) $\sqrt{x}$

24. Simplifica:

$$P = \sqrt[n]{\frac{x^{3n} + \sqrt[n]{\frac{x^{4n^2} + x^{3n^2}}{x^{2n^2} + x^{n^2}}}}{x^{n} + 1}}$$

A) x B) x^2 C) x^3
D) x^4 E) x^5

Claves

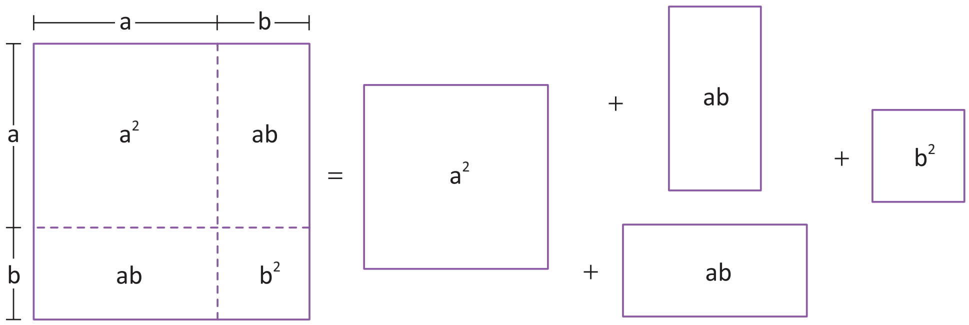
NIVEL 1	8. D	15. B	22. B
1. B		16. D	23. B
2. E	**NIVEL 2**		24. B
3. D	9. D	**NIVEL 3**	
4. E	10. B	17. C	
5. D	11. E	18. C	
6. E	12. D	19. B	
7. A	13. A	20. B	
	14. E	21. A	

Productos notables

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

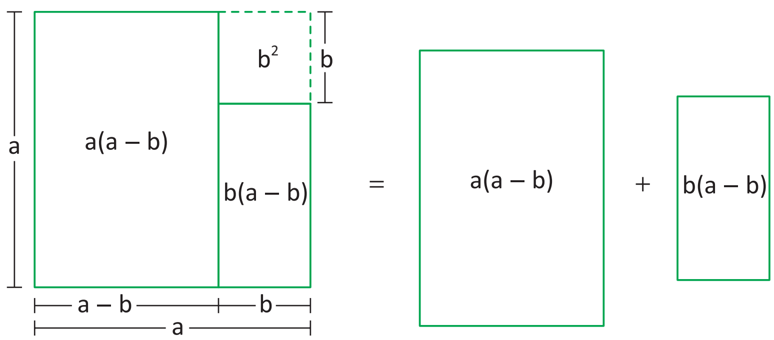
Los productos notables conocidos en la actualidad tienen su interpretación geométrica. Veamos a continuación:

Trinomio cuadrado perfecto



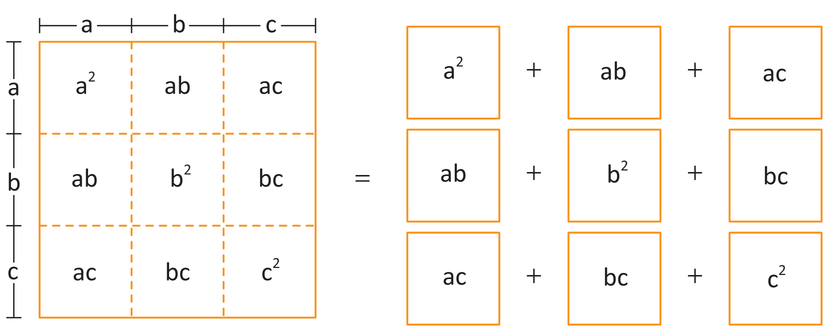
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Diferencia de cuadrados



$$a(a - b) + b(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Desarrollo de un trinomio al cuadrado



$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Importante

$(a - b)^2 = (b - a)^2$



Observación

Todo trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ es cuadrado perfecto si y solo si $b^2 = 4ac$.

Ejemplo:

$9x^2 + 12x + 4$ es un trinomio, ya que $12^2 = 4(9)(4)$.



PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

Observación

Identidad de Legendre

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$



Trinomio cuadrado perfecto

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Binomio al cubo

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

Observación

$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2+3b^2)$

$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2+b^2)$



Suma y diferencia de cubos

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Producto de multiplicar binomios con un término común

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Desarrollo de un trinomio al cuadrado

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Desarrollo de un trinomio al cubo

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$$

Problemas resueltos

1 La suma de dos números es 7 y su producto es 10, calcula la suma de sus cuadrados.

Resolución:

Sean a y b los números, según el enunciado:

$a + b = 7 \wedge ab = 10$

Sabemos que: $\underbrace{(a+b)^2} = a^2 + b^2 + \underbrace{2ab}$

Remplazando: $7^2 \quad = a^2 + b^2 + 2(10)$

$49 \quad = a^2 + b^2 + 20$

$\therefore \; a^2 + b^2 = 29$

2 Efectúa:

$$E = \frac{1}{a^2}\left[\left(\sqrt{a}+b\right)\left(\sqrt{a}-b\right)\left(a+b^2\right)+b^4\right]$$

Resolución:

Aplicamos diferencia de cuadrados:

$$E = \frac{1}{a^2}\left[\left(\sqrt{a}^2-b^2\right)\left(a+b^2\right)+b^4\right]$$

$$E = \frac{1}{a^2}\left[(a-b^2)(a+b^2)+b^4\right]$$

$$E = \frac{1}{a^2}\left[a^2-(b^2)^2+b^4\right]$$

$$E = \frac{1}{a^2}\left[a^2-b^4+b^4\right] = \frac{1}{a^2}.a^2$$

$\therefore \; E = 1$

3 Simplifica:

$$M = \frac{a^2+2ab+b^2-7}{a+b+\sqrt{7}}$$

Resolución:

En el numerador se forma un binomio al cuadrado:

$$M = \frac{(a+b)^2-\sqrt{7}^2}{a+b+\sqrt{7}}$$

Aplicamos diferencia de cuadrados:

$$M = \frac{\left(a+b+\sqrt{7}\right)\left(a+b-\sqrt{7}\right)}{a+b+\sqrt{7}}$$

$\therefore \; M = a+b-\sqrt{7}$

4 Efectúa:

$$P = \sqrt[5]{x+\sqrt{x^2-y^{10}}}\,.\sqrt[5]{x-\sqrt{x^2-y^{10}}}$$

Resolución:

$$P = \sqrt[5]{\left(x+\sqrt{x^2-y^{10}}\right)\left(x-\sqrt{x^2-y^{10}}\right)}$$

Aplicamos diferencia de cuadrados:

$$P = \sqrt[5]{x^2-\left(\sqrt{x^2-y^{10}}\right)^2}$$

$$P = \sqrt[5]{x^2-\left(x^2-y^{10}\right)} = \sqrt[5]{x^2-x^2+y^{10}} = \sqrt[5]{y^{10}}$$

$\therefore \; P = y^2$

5 Simplifica:

$$N = \frac{(x+7)^3-\left(x^3+7^3\right)}{x(x+7)}$$

Resolución:

Aplicamos binomio al cubo:

$$N = \frac{\cancel{x^3}+\cancel{7^3}+3x.7(x+7)-\cancel{x^3}-\cancel{7^3}}{x(x+7)}$$

$$N = \frac{21x(x+7)}{x(x+7)}$$

$\therefore \; N = 21$

6 Efectúa:

$$L = \left(\sqrt[3]{3}+1\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1\right)$$

Resolución:

Dando forma:

$$L = \left(\sqrt[3]{3}+1\right)\left(\sqrt[3]{3}^2-\sqrt[3]{3}\,.1+1^2\right)$$

Aplicamos suma de cubos:

$$L = \left(\sqrt[3]{3}\right)^3+1^3 = 3+1$$

$\therefore \; L = 4$

7 Efectúa:

$Q = (x+1)(x+2) - (x+3)^2 + (x-3)^2 - (x-4)(x-5)$

Resolución:

Aplicamos: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$Q = x^2 + 3x + 2 - (x^2 + 6x + 9) + x^2 - 6x + 9 - (x^2 - 9x + 20)$

$Q = x^2+3x+2-x^2-6x-9+x^2-6x+9-x^2+9x-20$

$= 2 - 20$

$\therefore\ Q = -18$

8 Si: $(a + b)^3 = a^3 + b^3$, $ab \neq 0$

Halla: $\left(\frac{a}{b}\right)$

Resolución:

Aplicando binomio al cubo:

$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = a^3 + b^3$

$\underbrace{3ab}_{\neq 0}(a + b) = 0$

$a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

Piden $\frac{a}{b} = \frac{-b}{b} = -1$

9 Si: $a + b = 5 \wedge ab = 3$

Calcula: $N = a^4 + b^4$

Resolución:

Sabemos que:

$\underbrace{(a + b)^2}_{5^2} = a^2 + \underbrace{2ab}_{} + b^2$

$5^2 = a^2 + 2(3) + b^2$

$25 = a^2 + b^2 + 6 \Rightarrow a^2 + b^2 = 19$

Luego:

$\underbrace{(a^2 + b^2)^2}_{19^2} = (a^2)^2 + 2a^2 b^2 + (b^2)^2$

$19^2 = a^4 + 2(ab)^2 + b^4$

$361 = a^4 + 2\,(3)^2 + b^4$

$361 = a^4 + b^4 + 18$

$\therefore\ a^4 + b^4 = 343$

10 Sabiendo que:

$x + y + z = 5$

$x^2 + y^2 + z^2 = 3$

Calcula: $(xy + xz + yz)^{-1}$

Resolución:

Sabemos que:

$\underbrace{(x + y + z)^2}_{5^2} = \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{3} + 2(xy + xz + yz)$

$5^2 = 3 + 2(xy + xz + yz)$

$25 = 3 + 2(xy + xz + yz)$

$22 = 2(xy + xz + yz)$

$xy + xz + yz = 11$

$\therefore\ (xy + xz + yz)^{-1} = \frac{1}{11}$

11 Efectúa:

$M = (x + y)(x - y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8) + y^{16}$

Resolución:

Aplicando diferencia de cuadrados:

$M = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8) + y^{16}$

$= (x^4 - y^4)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8) + y^{16}$

$= (x^8 - y^8)(x^8 + y^8) + y^{16}$

$= x^{16} - y^{16} + y^{16} = x^{16}$

12 Calcula:

$P = \sqrt{(x + 8)^2 - (x + 9)(x + 7)}$

Resolución:

Sabemos que:

$(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Luego:

$P = \sqrt{x^2 + 16x + 64 - (x^2 + 16x + 63)}$

$P = \sqrt{x^2 + 16x + 64 - x^2 - 16x - 63}$

$\therefore\ P = 1$

Actividades de razonamiento

1. Simplifica:

$$S = \frac{(x+3)^2 - 1}{(x+2)}$$

A) 1 B) x + 4 C) x – 2 D) 2x E) x + 3

2. Si se cumple $(a-b)^3 = a^3 - b^3$; $ab \neq 0$

Halla: a/b

A) 5 B) 3 C) 1 D) 4 E) 2

3. Efectúa:

$$E = (a+b)^2 - (a+b)(a-b) - [a(2b-2) - (b^2 - 2a)]$$

A) a + b B) 2b C) 2a D) $2a^2$ E) $3b^2$

4. Simplifica:

$$E = \frac{(1+xy)^2 - (x+y)^2}{1-x^2}$$

A) $1 - y^2$ B) $1 + y$ C) $1 - x^2$
D) y^2 E) $1 - x$

5. Efectúa:

$$R = \left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)\left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right) + 1$$

A) 3 B) 1 C) 2 D) 5 E) 4

6. A qué es igual:

$$E = \sqrt{(x-y)^2 + 4xy}, \; x > y > 0$$

A) x . y B) x^2 C) y^2 D) x – y E) x + y

7. Calcula el valor de:

$E = r^2 - 2r - 2$

Si: $r = \sqrt{2} + 1$

A) 1 B) 2 C) 4 D) –1 E) 3

8. Simplifica:

$$E = 2b^2 + 2ab + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2}$$

y calcula: $\sqrt{E}$

A) $a^2 + b^2$ B) a + b C) a – b
D) $(a+b)^2$ E) $a^2 - b^2$

9. Efectúa:

$(m + 3)^3 - 9m(m + 3) - m^3$

A) 27 B) 30 C) 33 D) 35 E) 37

10. Efectúa:

$R = (t + 2)^3 - (t - 2)^3 - 12t^2$

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

11. Si: $a^2 - b^2 = 42$ y $a - b = 7$

Calcula: $a + b$

A) 5 B) 4 C) 6 D) 7 E) 21

12. Si: $ab = 3$ y $a + b = 5$

Calcula: $a^2 + b^2$

A) 16 B) 17 C) 19 D) 21 E) 23

13. Si: $a^2 + b^2 = 45$ y $ab = 18$

Halla: $a^3 - b^3$

A) 170 B) 179 C) 183 D) 189 E) 200

14. Calcula m, si:

$(x + 3)^2 = x^2 + mx + 9$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Claves

1. B, 2. C, 3. E, 4. A, 5. C, 6. E, 7. D, 8. B, 9. A, 10. C, 11. C, 12. C, 13. D, 14. B

Reto



Si se tiene $x + \frac{1}{x} = 5$,

Halla: $x^3 + \frac{1}{x^3}$

Rpta.: 110

Refuerza practicando

NIVEL 1

Efectúa:

1. $(2x^3 + 5)^2$

A) $4x^6 + 25$
B) $4x^6 + 20x^3 + 25$
C) $2x^6 + 20x^3 + 25$
D) $4x^6 + 10x^3 + 25$
E) $2x^3 + 5$

2. $(x + 2)^3 - 6x(x + 2) - 8$

A) x^3 B) x^4 C) x^5 D) x^6 E) x^2

3. $(x + 1)(x + 2) + (x + 2)(x + 3) - 2(x - 5)(x - 2) - x$

A) 28
B) $x^2 + 4x + 28$
C) $21x - 12$
D) $x + 28$
E) x

4. $(x^2 + 6)(x^2 - 5) - (x^2 + 4)(x^2 - 7)$

A) $x^4 + x^2$
B) $4x^2 - 2$
C) $4x^2 + 2x$
D) 12
E) 6

5. $(y + 3)(y - 3)(y^2 + 9) + 81$

A) y B) y^2 C) y^3 D) y^4 E) y^5

6. $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 - 2(x^2 - 4)$

A) 40 B) 20 C) 24 D) x^2 E) 10

7. $(x - 6)(x + 5) + (x + 2)(x - 1) + 32$

A) x^2 B) $2x^2$ C) $3x^2$ D) $4x^2$ E) $5x^2$

8. $(a + 2x)(2x - 3a) + 4ax + 3a^2$

A) x^2 B) $2x^2$ C) $3x^2$ D) $4x^2$ E) $5x^2$

9. $(2x^2 - 7)(2 + 2x^2) - 4x^4 + 10x^2$

A) −11 B) −12 C) −13 D) −14 E) −15

NIVEL 2

10. Efectúa: $R = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2; \forall x; y \in \mathbb{R}^+$

A) $2x + 2y$
B) $4xy$
C) 0
D) $4\sqrt{xy}$
E) $x + y$

(11) Efectúa: $(9x^2 + 3x + 1)(3x - 1)$

A) $9x^2 - 1$ B) $9x^2 + 1$ C) $27x - 1$
D) $27x^3 + 1$ E) $27x^3 - 1$

(12) Efectúa: $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6x^2$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(13) Efectúa:
$A = (a + 2m)^3 + (a - 2m)^3 - 2a(a^2 + 12m^2)$

A) a B) −1 C) 0 D) m E) −2m

(14) Efectúa:
$M = \sqrt[3]{(x+y)(x^2 - xy + y^2) - y(3x^2 - 3xy + 2y^2)}$

A) $x + y$ B) $x - y$ C) $2x$

D) $2y$ E) $\frac{x}{y}$

(15) Efectúa:
$(m^5 + 5)(25 + m^{10} - 5m^5) - 125$

A) m B) m^5 C) m^{10} D) m^{15} E) m^8

(16) Efectúa: $(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^6 - x^3 + 1) - x^9$

A) x B) 0 C) −1 D) −2 E) 1

(17) Efectúa: $(4x^6 - 2x^3 + 1)(2x^3 + 1) - 1$

A) $2x^9$ B) $8x^9$ C) $8x^8$ D) $9x^9$ E) $7x^7$

NIVEL 3

(18) Efectúa: $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) + 1$

A) x^6 B) x^7 C) x^8 D) x^9 E) x^{10}

(19) Si: $ab = 4$; $a^2 + b^2 = 17$
Halla: $a + b$

A) 5 B) 3 C) 4 D) 2 E) 1

(20) Si: $P = (a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$Q = (a^2 - ab + b^2)(a^6 + b^6)(a^{12} + b^{12})$
Halla: $PQ + b^{24}$

A) a^{12} B) b^{12} C) a^{24}
D) b^{24} E) $a^{12}b^{12}$

21. Si: $a+\frac{1}{a}=6$

Halla: $a^3+\frac{1}{a^3}$

A) 195 B) 198 C) 200 D) 205 E) 210

22. Efectúa:

$$\frac{\sqrt[3]{a^3+3ab(a+b)+b^3}-(a-b)}{\sqrt[3]{a^3-3ab(a-b)-b^3}+(a+b)}$$

A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{b}{a}$ C) ab D) a E) b

23. Si: $a+b=12;\ a^2+b^2=100$

Halla: ab

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

24. Calcula: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

Si: $a+b=\sqrt{5}$; $ab=2$

A) -4 B) $\frac{2}{3}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

25. Si: $x+\frac{1}{x}=4$

Calcula: $x^3+\frac{1}{x^3}$

A) 50 B) 64 C) 12 D) 52 E) 28

26. Si: $x+\frac{1}{x}=6$

Halla: $x^2+\frac{1}{x^2}$

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

Claves

NIVEL 1	8. D	15. D	22. B
1. B	9. D	16. E	23. C
2. A	NIVEL 2	17. B	24. E
3. C	10. D	NIVEL 3	25. D
4. B	11. E	18. C	26. E
5. D	12. A	19. A	
6. A	13. C	20. C	
7. B	14. B	21. B	

Relaciones de tiempo y parentesco

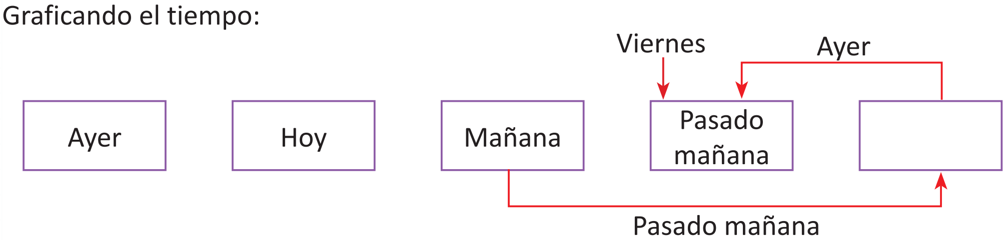
RELACIONES DE TIEMPO



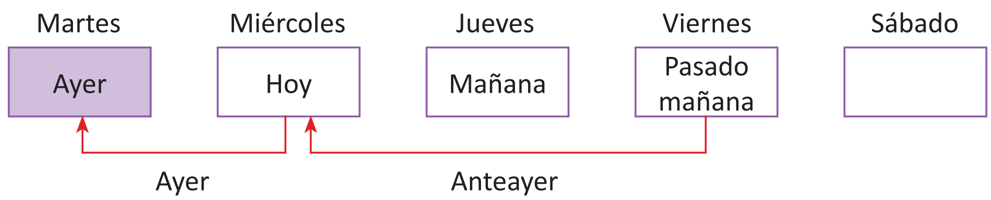
Para resolver este tipo de problemas podemos utilizar el método regresivo o asignando valores numéricos al tiempo en mención.

Ejemplo:
El ayer del pasado mañana de mañana es viernes. ¿Qué día fue el ayer del anteayer de pasado mañana?

Resolución:
Graficando el tiempo:



Ubicando el día indicado en el problema:



Nota

De igual manera, para hallar el día pedido:
1.° pasado mañana
2.° anteayer
3.° ayer

∴ El día pedido es martes.



Otra forma:

Anteayer	Ayer	Hoy	Mañana	Pasado mañana
−2	−1	0	+1	+2

- Analizando la primera parte del problema y comparando con el cuadro:

  El $\underbrace{\text{ayer}}_{\not{-1}}$ de $\underbrace{\text{pasado mañana}}_{+2}$ de $\underbrace{\text{mañana}}_{\not{+1}}$ es viernes.

  ⇒ +2 es viernes.

- Regresando al cuadro:

Anteayer	Ayer	Hoy	Mañana	Pasado mañana
−2	−1	0	+1	+2
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes

Luego:

El ayer del anteayer de pasado mañana.
−1 −2 +2 (−2 y +2 tachados)

−1 <> ayer (martes)

∴ El día pedido es martes.

Equivalencias:

trasanteayer	<>	−3
anteayer	<>	−2
ayer	<>	−1
hoy	<>	0
mañana	<>	+1
pasado mañana	<>	+2
traspasado mañana	<>	+3

Atención

En este tipo de problemas solo es necesarios saber qué relación existe entre 2 integrantes de una familia.



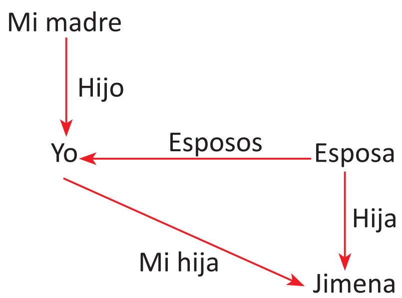
RELACIONES DE PARENTESCO

Estos problemas se clasifican de la siguiente manera:

Según la relación de parentesco que existe dentro de la familia

Ejemplo:
¿Qué relación de parentesco tiene conmigo Jimena, que es la hija de la esposa del único hijo de mi madre?

Resolución:
Haciendo un esquema:



∴ Jimena es mi hija.

Observación

Otra forma:

Analizamos empezando de la parte final.

La hija de la esposa del único hijo de mi madre.

único hijo de mi madre → Yo

esposa del único hijo de mi madre → Mi esposa

La hija de la esposa del único hijo de mi madre → Mi hija

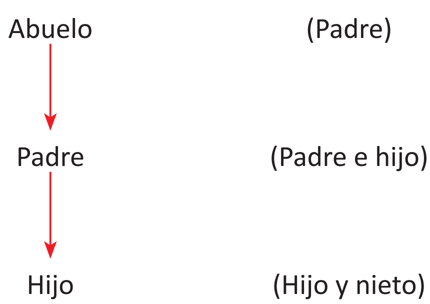
∴ Jimena es mi hija.



Según la cantidad de miembros de una familia

Ejemplo:
En una reunión se encuentran sentados 2 padres, 2 hijos y un nieto. ¿Cuál es el mínimo número de personas que se encuentran en dicha reunión?

Resolución:
En este tipo de problemas debemos considerar que a cada miembro de una familia se le debe atribuir la mayor cantidad de relaciones posibles.



∴ El número mínimo de personas es 3.

Recuerda

En este tipo de problemas a cada persona se le asigna la mayor cantidad de relaciones familiares posibles.

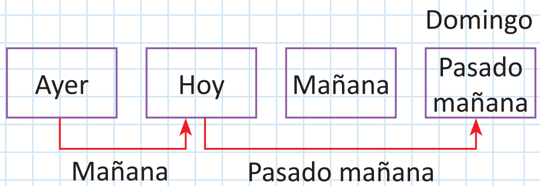


Problemas resueltos

1 Si el pasado mañana del mañana de ayer es domingo. ¿Qué día fue ayer?

Resolución:

Ubicando los tiempos:



Ubicando los días de la semana:

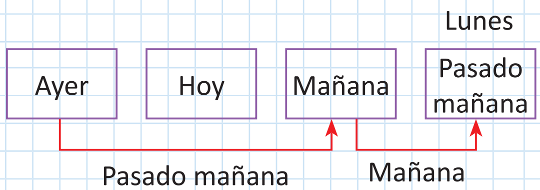
Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Ayer	Hoy	Mañana	Pasado mañana

∴ Ayer fue Jueves.

2 El mañana del pasado mañana de ayer será lunes. ¿Qué día será mañana?

Resolución:

Ubicamos los tiempos:



Ubicando los días de la semana:

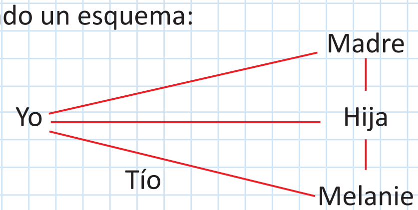
Viernes	Sábado	Domingo	Lunes
Ayer	Hoy	Mañana	Pasado mañana

∴ Mañana será domingo.

3 ¿Qué relación familiar tiene conmigo Melanie, si su madre fue la única hija de mi madre?

Resolución:

Haciendo un esquema:

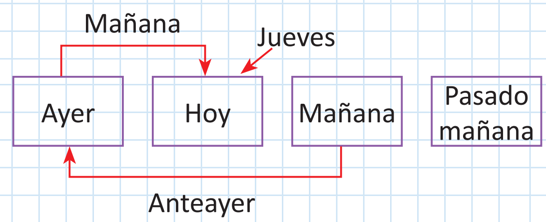


∴ La relación será tío-sobrina.

4 Si el mañana del anteayer de mañana fue jueves. ¿Qué día será pasado mañana?

Resolución:

Gráficamente:



Ubicando los días de la semana:

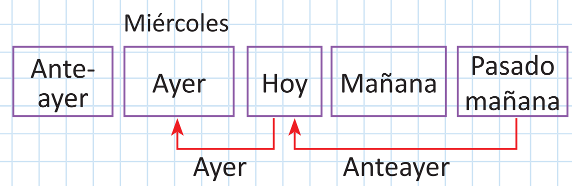
Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Ayer	Hoy	Mañana	Pasado mañana

∴ Pasado mañana será sábado.

5 El ayer de anteayer de pasado mañana es miércoles. ¿Qué día fue anteayer?

Resolución:

Gráficamente:



Ubicando los días de la semana:

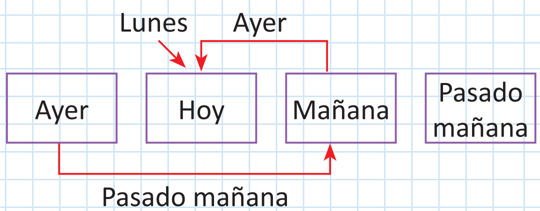
Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Ante-ayer	Ayer	Hoy	Mañana	Pasado mañana

∴ Anteayer fue martes.

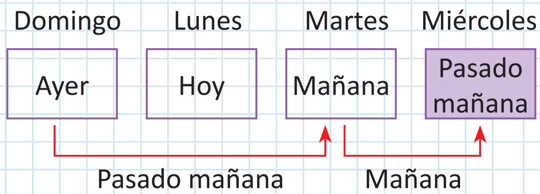
6 El ayer del pasado mañana de ayer es lunes. ¿Qué día es el mañana del pasado mañana de ayer?

Resolución:

Gráficamente:



Luego:

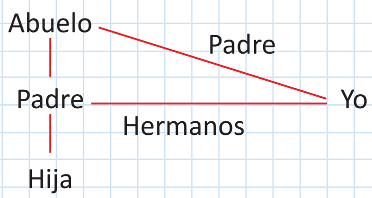


∴ El día pedido será miércoles.

7 ¿Qué relación tiene conmigo el abuelo paterno de la hija de mi hermano?

Resolución:

Realizando un esquema:

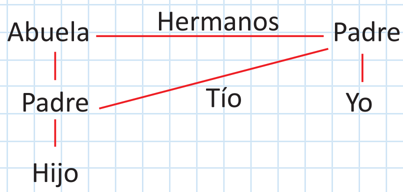


∴ Es mi padre.

8 ¿Que relación tiene conmigo el tío del padre del nieto de la única hermana de mi padre?

Resolución:

En el esquema:

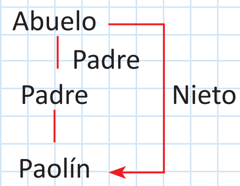


∴ Es mi padre.

9 ¿Quién es el único nieto del padre del padre de Paolín?

Resolución:

Haciendo un esquema:

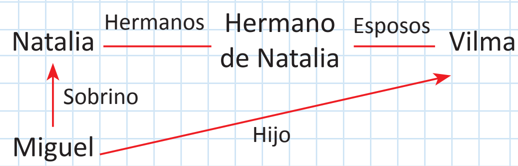


∴ Es Paolín.

10 Miguel es sobrino de Natalia. Si Natalia no tiene hermanas y su único hermano está casado con Vilma. ¿Qué es Miguel de Vilma?

Resolución:

Haciendo un esquema:

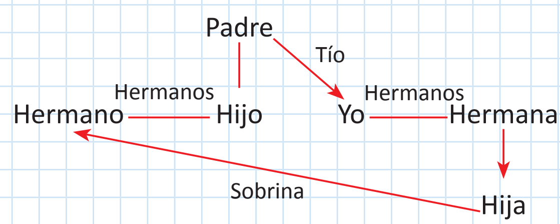


∴ Miguel es hijo de Vilma.

11 ¿Qué parentesco tiene la hija de mi hermana con el hermano del hijo de mi tío?

Resolución:

Haciendo un esquema:



∴Es su sobrina.

Actividades de razonamiento

1. ¿Qué viene a ser de mí el cuñado del hermano de mi madre?

A) Mi padre B) Mi nieto C) Mi primo
D) Mi hermano E) Mi abuelo

2. ¿Qué relación de parentesco tiene conmigo el tío del hijo de la hermana de mi padre?

A) Mi abuelo B) Mi nieto C) Mi padre
D) Mi primo E) Mi hermano

3. Si el mañana de ayer es sábado. ¿Qué día será el mañana del pasado mañana de anteayer?

A) Viernes B) Miércoles C) Jueves
D) Domingo E) Sábado

4. Si el ayer de pasado mañana es lunes. ¿Qué día será el anteayer del ayer de mañana?

A) Jueves B) Miércoles C) Domingo
D) Sábado E) Viernes

5. ¿Qué parentesco tiene conmigo un joven que es el hijo de la esposa del único hijo de mi abuela?

A) Mi primo B) Mi hermano
C) Mi sobrino D) Mi tío
E) Mi padre

6. Tony es el único hijo del abuelo de Rodrigo y Ana es la hija de Tony. ¿Qué es Rodrigo de Ana?

A) Su tío B) Su sobrino C) Su hermano
D) Su padre E) Su primo

7. Si el anteayer de mañana es domingo. ¿Qué día será el pasado mañana del ayer de pasado mañana?

A) Miércoles B) Viernes C) Martes
D) Lunes E) Jueves

8. Si el mañana del pasado mañana de mañana es lunes. ¿Qué día es el ayer del anteayer de pasado mañana?

A) Miércoles B) Viernes C) Domingo
D) Lunes E) Martes

9. Si soy hijo único, ¿qué relación tengo con la madre del nieto de mi padre?

A) Es mi hermana
B) Es mi prima
C) Es mi madre
D) Es mi esposa
E) Es mi cuñada

10. ¿Qué relación de parentesco tengo con el hermano de la hija de la hermana de mi abuela?

A) Mi padre
B) Mi primo
C) Mi tío
D) Mi hermano
E) Mi padre

11. En un auto viajan: 1 abuelo, 2 padres, 2 hijos y un nieto. ¿Cuántas personas como mínimo viajan?

A) 3
B) 2
C) 1
D) 4
E) 5

12. En una reunión familiar, están presentes: 1 abuelo, 3 padres, 4 hijos, 2 tíos, 2 sobrinos, 2 primos y 2 nietos. ¿Cuál es el menor número de personas presentes en dicha reunión?

A) 7
B) 5
C) 4
D) 6
E) 8

13. Si el anteayer del ayer de pasado mañana es viernes. ¿Qué día será mañana?

A) Viernes
B) Lunes
C) Sábado
D) Domingo
E) Miércoles

14. Si el pasado mañana de mañana es miércoles. ¿Qué día será el anteayer del ayer de mañana?

A) Lunes
B) Martes
C) Miércoles
D) Jueves
E) Viernes

Claves

1. A
2. C
3. D
4. E
5. B
6. C
7. E
8. A
9. D
10. C
11. A
12. B
13. D
14. E

Reto



En una tumba del cementerio de Alencourt, en las cercanías de París, se encuentra la siguiente inscripción, que damos traducida al castellano:

Aquí yace el hijo; aquí yace la madre;
Aquí yace la hija; aquí yace el padre;
Aquí yace la hermana; aquí yace el hermano;
Aquí yacen la espoca y el marido.

Sin embargo, hay solamente tres tumbas. ¿Qué relación tienen la hija y la hermana?

Rpta.: es la misma persona.

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Si el pasado mañana del mañana de ayer es viernes, ¿qué día fue ayer?

A) Jueves B) Lunes C) Miércoles
D) Domingo D) Martes

2. Si el mañana del anteayer de mañana fue martes, ¿qué día será pasado mañana?

A) Jueves B) Sábado C) Martes
D) Lunes E) Miércoles

3. El ayer del pasado mañana de ayer es sábado. ¿Qué día es el mañana del pasado mañana de ayer?

A) Viernes B) Domingo C) Lunes
D) Sábado E) Martes

4. Sabiendo que el antes de ayer de mañana es miércoles, ¿qué día será el pasado mañana del ayer de pasado mañana?

A) Lunes B) Domingo C) Martes
D) Sábado E) Jueves

5. Si hoy fuese mañana, pasado mañana fuese jueves. ¿Qué día es hoy?

A) Viernes B) Domingo C) Martes
D) Miércoles E) Lunes

6. ¿Qué día es el ayer del anteayer del día viernes?

A) Lunes B) Miércoles C) Viernes
D) Martes E) Jueves

7. ¿Qué parentesco tengo con el único hermano de la hija del padre de mi padre?

A) Soy yo B) Mi tío C) Mi hijo
D) Mi padre E) Mi abuelo

8. Si la hija de Jéssica es la madre de mi hija, qué parentesco tengo con Jésica?

A) Hermanos B) Primo-hermanos
C) Yerno-suegra D) Primos
E) Esposos

9. Nelson es tío materno de Gisela, Gisela es hermana de Lita y Lita es madre de Paula. ¿Qué es Paula de Nelson?

A) Hija B) Nieta C) Sobrina
D) Prima E) Sobrina-nieta

10. ¿Qué es mi hijo, respecto al hijo del hijo de mi padre?

A) Primo B) Sobrino C) Padre
D) Tío E) Abuelo

NIVEL 2

11. El ayer del pasado mañana es jueves, ¿qué día será el mañana de anteayer?

A) Martes B) Miércoles C) Jueves
D) Lunes E) Sábado

12. Si el pasado mañana del mañana de anteayer es martes. ¿Qué día será el ayer de pasado mañana de hace 3 días?

A) Lunes B) Martes C) Domingo
D) Viernes E) Sábado

13. El ayer del anteayer de mañana fue jueves. ¿Qué día será el mañana del mañana de pasado mañana?

A) Domingo B) Miércoles C) Jueves
D) Lunes E) Sábado

14. El día que está 3 días después del mañana del anteayer de mañana será domingo. ¿Qué día fue el ayer del pasado mañana hace 4 días?

A) Martes B) Jueves C) Domingo
D) Miércoles E) Lunes

15. ¿Qué día es el ayer del anteayer del día miércoles?

A) Jueves B) Lunes C) Domingo
D) Martes E) Sábado

16. Si sabemos que el antes de ayer de mañana es jueves, ¿qué día será el pasado mañana del ayer de pasado mañana?

A) Miércoles B) Jueves C) Domingo
D) Lunes E) Martes

17. ¿Qué relación de parentesco tiene conmigo el tío del hijo del único hermano de mi padre?

A) Mi padre B) Mi primo C) Mi tío
D) Mi hermano E) Mi abuelo

18. ¿Quién es el padre del hijo del hijo de Antonio?

A) El nieto de Antonio B) El padre de Antonio
C) El abuelo de Antonio D) El primo de Antonio
E) El hijo de Antonio

19. ¿Qué relación de parentesco tiene conmigo el hijo del abuelo del hijo del único hermano de mi tío?

A) Mi sobrino B) Mi primo C) Mi padre
D) Mi hijo E) Mi abuelo

20. ¿Cuál es la relación de parentesco que existe entre el hijo de la esposa del único hijo de mi padre y yo?

A) Mi hijo B) Mi nieto C) Mi primo
D) Mi abuelo E) Mi cuñado

NIVEL 3

21. Si el anteayer del mañana de pasado mañana es viernes, ¿qué día fue ayer?

A) Viernes B) Sábado C) Domingo
D) Jueves E) Miércoles

22. Si el ayer de mañana es lunes, ¿qué día será el mañana del ayer de pasado mañana?

A) Miércoles B) Jueves C) Viernes
D) Domingo E) Lunes

23. Si el martes es el mañana de hoy, antes de ayer fue:

A) Sábado B) Lunes C) Martes
D) Viernes E) Jueves

24. Si el ayer del anteayer de mañana es jueves. ¿Qué día será el pasado mañana del mañana de anteayer?

A) Martes B) Sábado C) Miércoles
D) Domingo E) Jueves

25. Si el anteayer de dentro de cinco días es domingo, ¿qué día será el pasado mañana del ayer de hace tres días del pasado mañana de mañana?

A) Lunes B) Sábado C) Jueves
D) Martes E) Viernes

26. Ayer era el pasado mañana del mañana del ayer del domingo. ¿Qué día fue el anteayer del día que sucede a hoy?

A) Miércoles B) Domingo C) Jueves
D) Lunes E) Sábado

27. Si la mamá de Edith es la hermana de mi hermano gemelo, ¿qué es respecto a mí el abuelo de la hermana de Edith?

A) Mi padre B) Mi tío C) Mi sobrino
D) Mi abuelo E) Mi hijo

28. ¿Qué parentesco tiene conmigo la hija de la esposa del único vástago de mi madre?

A) Mi nieta B) Mi sobrina C) Mi tía
D) Mi hija E) Mi hermana

29. En un almuerzo familiar están presentes 3 padres, 3 hijos y 2 nietos. ¿Cuántas personas como mínimo están compartiendo el almuerzo?

A) 4 B) 88 C)9
D) 10 E) 7

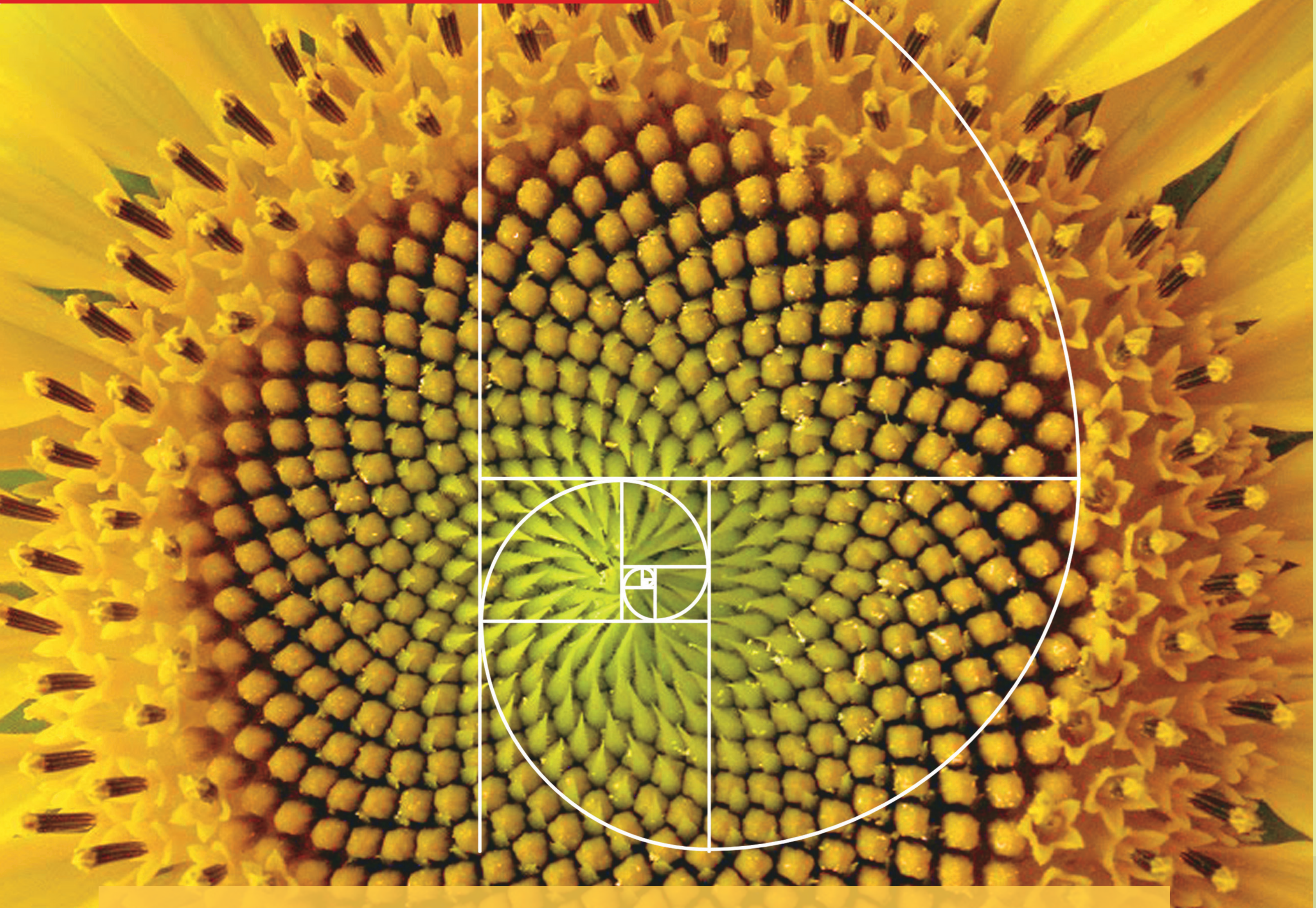
30. En una reunión se encuentran dos madres, dos hijas y una nieta. ¿Cuántas mujeres como mínimo se encuentran en dicha reunión?

A) 7 B) 4 C) 5
D) 6 E) 3

Claves

NIVEL 1	9. E	17. A	25. E
1. E	10. A	18. E	26. B
2. A	NIVEL 2	19. C	27. A
3. C	11. A	20. A	28. D
4. B	12. E	NIVEL 3	29. A
5. E	13. B	21. E	30. E
6. D	14. E	22. A	
7. D	15. C	23. A	
8. C	16. D	24. D	

UNIDAD 4



Edificios más frescos

El arquitecto Mick Pearce fue contratado para diseñar un edificio en su ciudad natal, Harare, Zimbabue, que pudiera mantenerse fresco sin necesidad de aire acondicionado, el cual es costoso de instalar y mantener porque sus partes deben importarse. La idea de basarse en un termitero (nido de termitas) "surgió como una pequeña broma", cuenta Pearce.

Sin embargo, había una buena razón para pensar en ese diseño: se sabe que las termitas enfrían sus casas de barro por medio de un ingenioso sistema que atrapa las corrientes de aire en la base del montículo. El diseño de Pearce usa ventiladores para succionar aire fresco del patio interior del edificio y enviarlo hacia arriba a través de unos huecos debajo de los pisos, y de allí a las oficinas por medio de rejillas de ventilación. El edificio de Pearce consume el 90 por ciento menos de electricidad en ventilación que un inmueble comparable con aire acondicionado, y el 35 por ciento menos que seis edificios de Harare en conjunto.

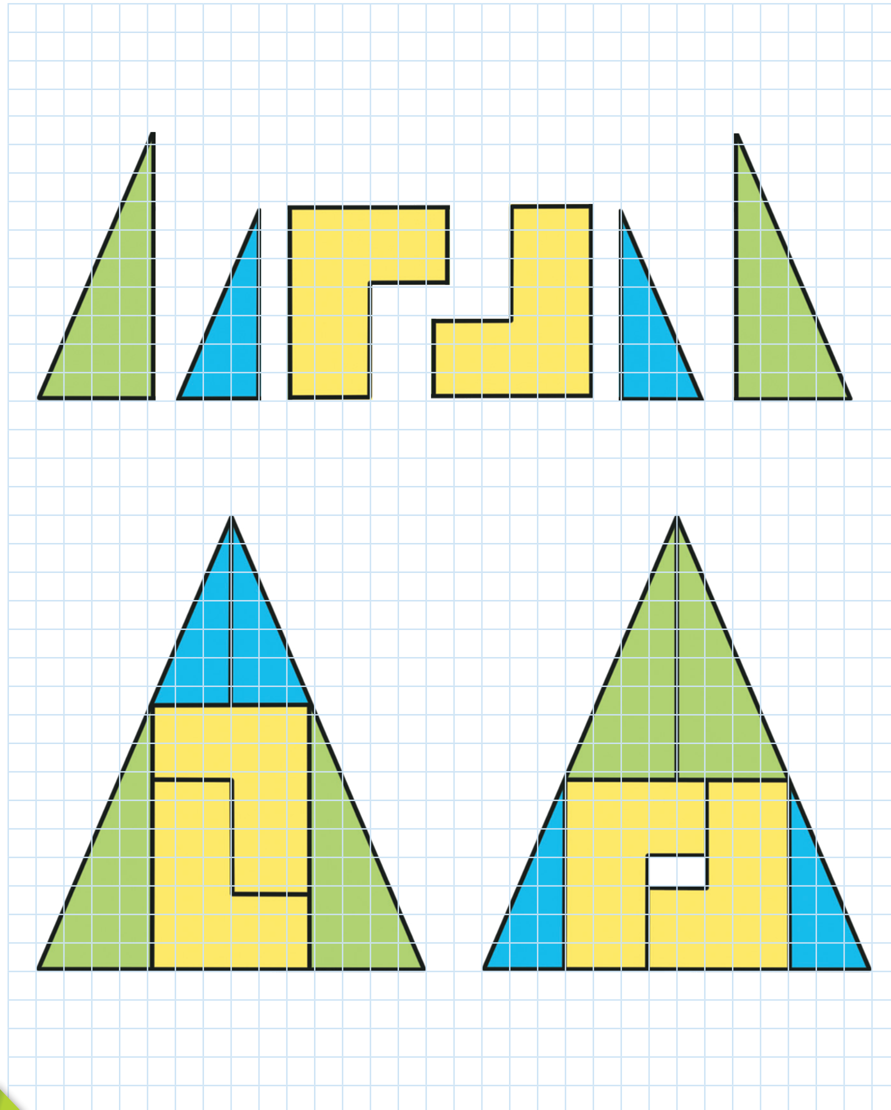
Matemática recreativa

La ilusión de los triángulos

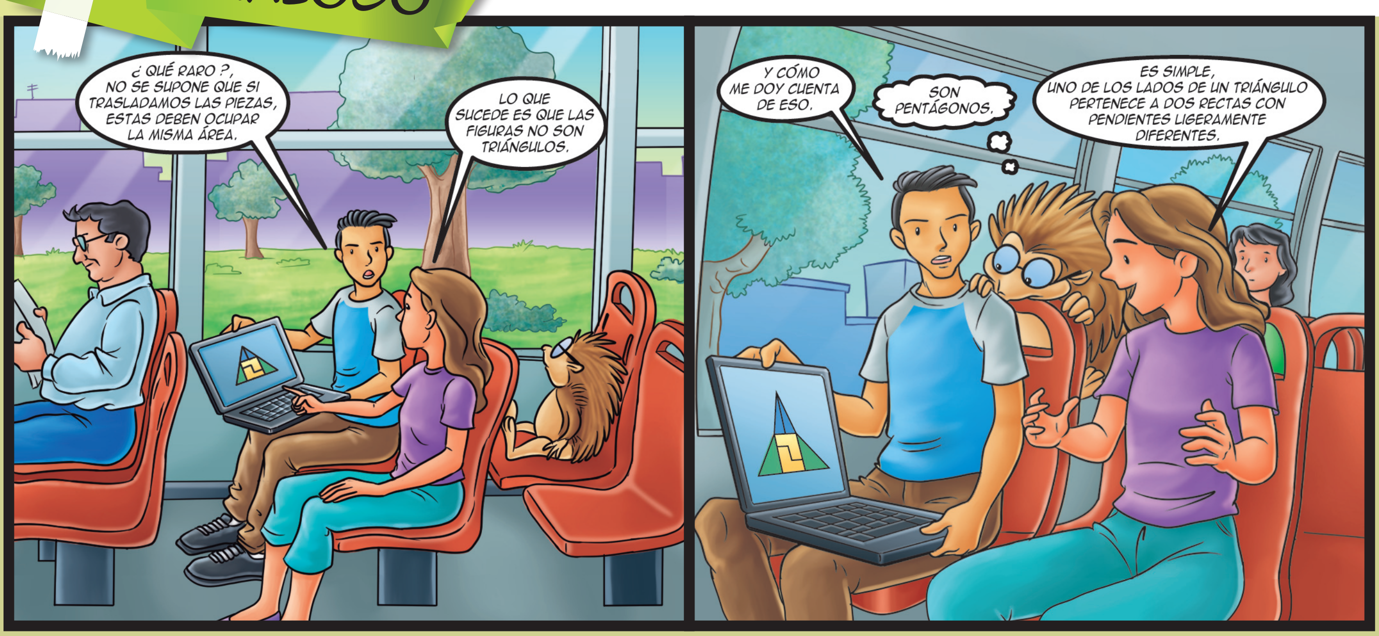
Este es un problema más interesante de lo que puede parecer a simple vista. Se trata de la variación de una especie de ilusión óptica, en la que "mágicamente" desaparecen dos cuadrados.

Más allá de cómo clasificarlo, es un excelente ejemplo de qué quiere decir pensar "geométricamente".

Esta es una variación, de una clásica ilusión llamada: "la paradoja del cuadrado perdido", en la que se presentan unas piezas que al reordenarse ocupan menor espacio.

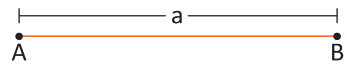


DIÁLOGO



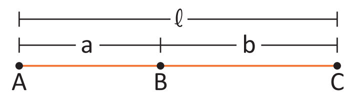
Razonamiento geométrico

SEGMENTOS



Notación:
Segmento AB o $\overline{AB}$
Longitud del segmento AB: AB = a

Operaciones con segmentos



Adición de segmentos

$AC = AB + BC$ $\qquad$ $\ell = a + b$

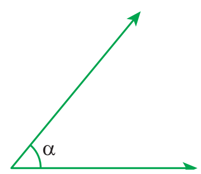
Sustracción de segmentos

$AB = AC - BC$ $\qquad$ $a = \ell - b$

ÁNGULOS

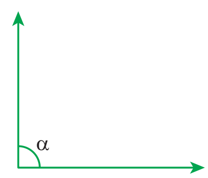
Clasificación según su medida

Ángulo agudo



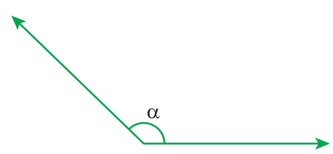
$0° < \alpha < 90°$

Ángulo recto



$\alpha = 90°$

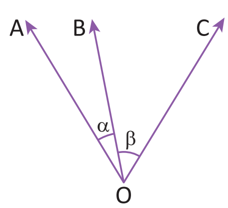
Ángulo obtuso



$90° < \alpha < 180°$

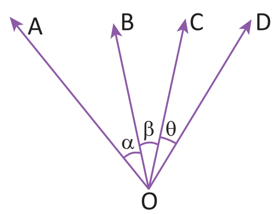
Clasificación según la posición de sus lados

Ángulos adyacentes



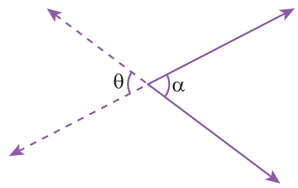
$m\angle AOC = \alpha + \beta$

Ángulos consecutivos



$m\angle AOD = \alpha + \beta + \theta$

Ángulos opuestos por el vértice

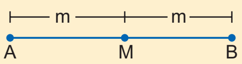


$\alpha = \theta$



Recuerda

Punto medio
Es aquel punto que pertenece a un segmento y lo divide en dos segmentos de igual longitud.

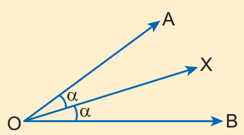


Si M ∈ $\overline{AB}$ y AM = MB, entonces M es el punto medio de $\overline{AB}$.



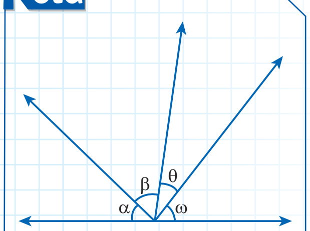
Atención

Bisectriz de un ángulo
Es aquel rayo que parte del vértice y divide al ángulo en dos ángulos congruentes.



$\overleftrightarrow{OX}$: bisectriz
$\Rightarrow m\angle AOX = m\angle XOB$

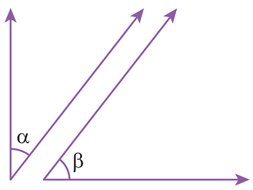
Nota



$\alpha + \beta + \theta + \omega = 180°$

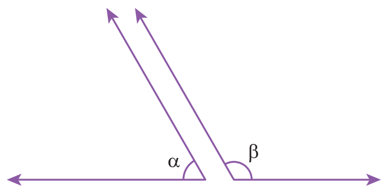
Clasificación según la suma de sus medidas

Ángulos complementarios



$\alpha + \beta = 90°$

Ángulos suplementarios



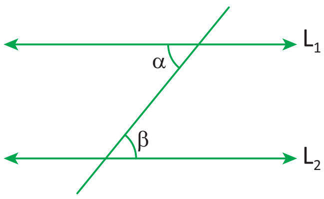
$\alpha + \beta = 180°$

> **Recuerda**
>
> **Complemento de un ángulo**
>
> $C(\alpha) = 90° - \alpha$
>
> Ejemplo:
>
> $C(30°) = 90° - 30° = 60°$
> $C(54°) = 90° - 54° = 36°$
>
> **Suplemento de un ángulo**
>
> $S(\alpha) = 180° - \alpha$
>
> Ejemplo:
>
> $S(75°) = 180° - 75° = 105°$
> $S(152°) = 180° - 152° = 28°$



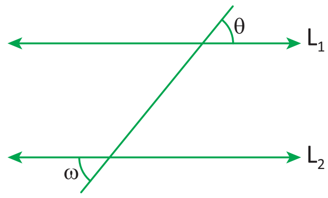
ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA SECANTE

Ángulos alternos internos



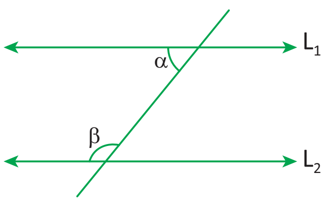
Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow$ $\alpha = \beta$

Ángulos alternos externos



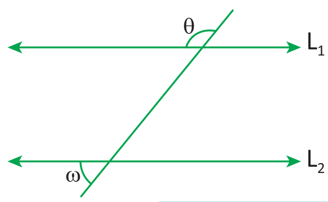
Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow$ $\theta = \omega$

Ángulos conjugados internos



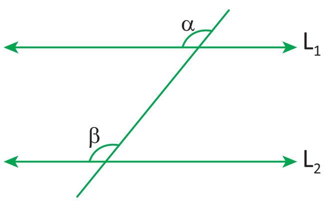
Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow$ $\alpha + \beta = 180°$

Ángulos conjugados externos

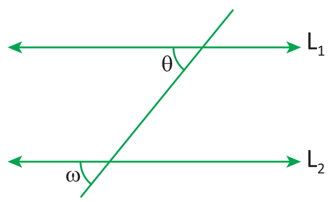


Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow$ $\theta + \omega = 180°$

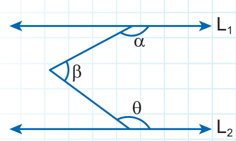
Ángulos correspondientes



Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow$ $\alpha = \beta$

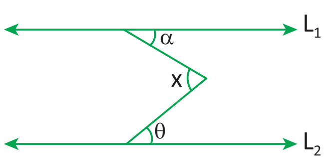


Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow$ $\theta = \omega$

> **Nota**
>
> Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$:
>
> 
>
>
> $\alpha + \beta + \theta = 360°$

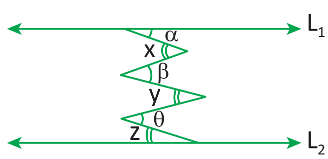
Propiedades

A)



Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow$ $x = \alpha + \theta$

B)



Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow$ $\alpha + \beta + \theta = x + y + z$

Problemas resueltos

1 Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A; B; C y D. Se sabe que:

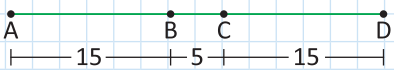
AB = CD = 15 cm; BC = $\frac{1}{3}$ CD. Halla AD.

Resolución:

AB = 15 cm

CD = 15 cm

BC = $\frac{1}{3}(15) \Rightarrow$ BC = 5 cm



Luego: AD = 15 + 5 + 15 = 35 cm

2 Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A; B; C; D y E; se sabe que:

$\frac{AB}{5} = \frac{CD}{3} = \frac{DE}{6}$; AC = DE; CE = 27 cm

Halla AE.

Resolución:

Por dato tenemos:

AB = 5k $\wedge$ CD = 3k $\wedge$ DE = 6k

Además: AC = DE

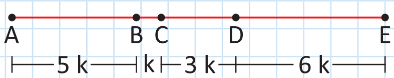
AB + BC = DE

5k + BC = 6k $\Rightarrow$ BC = k

Luego:

CE = 27

9k = 27 $\Rightarrow$ k = 3



Por lo tanto: AE = 5k + k + 3k + 6k = 15k = 15(3)

AE = 45 cm

3 Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A; M; B y C. Se sabe que M es punto medio de $\overline{AB}$; MC = 4(AM); BC = 24 cm. Halla AC.

Resolución:

Si M es punto medio de AB $\Rightarrow$ AM = MB = x

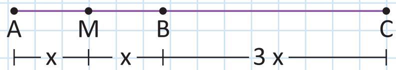
MC = 4AM

MB + BC = 4AM

x + BC = 4x $\Rightarrow$ BC = 3x

BC = 24

3x = 24 $\Rightarrow$ x = 8



Luego:

AC = AM + MB + BC = x + x + 3x = 5x

AC = 5(8) = 40 cm

4 Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A; B; C y D. Se sabe que: BC = 2AB y 3BC + 2CD = 36 cm. Halla AD.

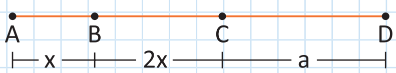
Resolución:

Si: BC = 2AB $\Rightarrow$ AB = x; BC = 2x

Del dato: 3BC + 2CD = 36

3(2x) + 2a = 36

3x + a = 18



Luego del gráfico: AD = 3x + a

Finalmente: AD = 18

5 El complemento del complemento de la medida de un ángulo es igual al suplemento del suplemento del complemento de la medida del ángulo. Halla el ángulo.

Resolución:

Sea α el ángulo por determinar.

Por condición del problema:

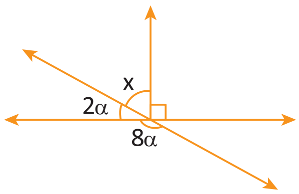
$$CC(\alpha) = SS(C(\alpha))$$

$$\alpha = C(\alpha)$$

$$\alpha = 90° - \alpha$$

$$2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$$

6 Halla el valor de x en la siguiente figura:



Resolución:

Del gráfico se tiene:

$2\alpha + 8\alpha = 180°$

$10\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 18°$

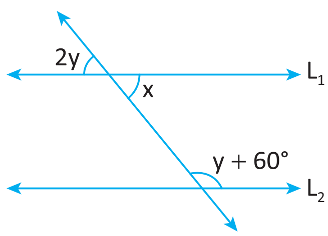
También:

$x + 2\alpha = 90°$

$x + 2(18°) = 90°$

$x + 36 = 90° \Rightarrow x = 54°$

7 Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, halla el valor de x.



Resolución:

Por ángulos opuestos por el vértice: $x = 2y$

Por ángulos conjugados internos:

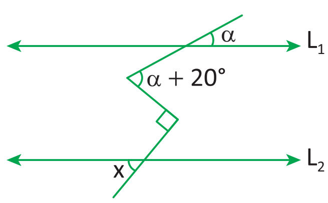
$x + y + 60° = 180°$

$2y + y = 120°$

$3y = 120° \Rightarrow y = 40°$

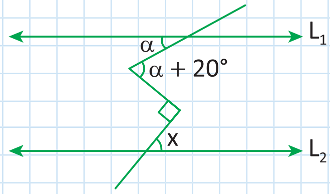
Finalmente: $x = 2(y) = 2(40°) = 80°$

8 Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, halla el valor de x.



Resolución:

Por ángulos opuestos por el vértice se tiene el siguiente gráfico:

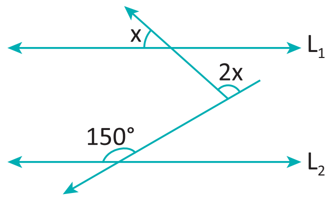


Aplicando propiedad:

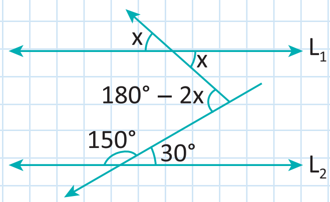
$x + \alpha + 20° = \alpha + 90°$

$x + 20° = 90° \Rightarrow x = 70°$

9 Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.



Resolución:



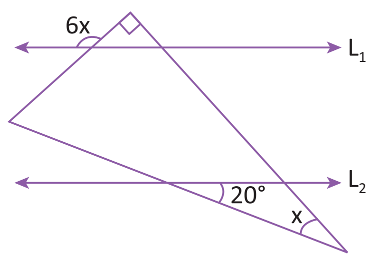
Luego:

$x + 30° = 180° - 2x$

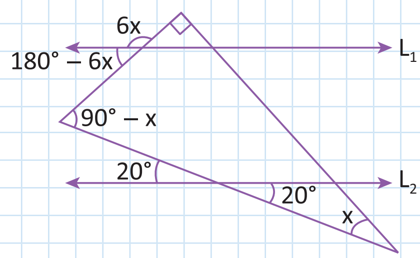
$3x = 150°$

$\Rightarrow x = 50°$

10 Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.



Resolución:



Luego: $90° - x = 180° - 6x + 20°$

$5x = 110° \Rightarrow x = 22°$

Actividades de razonamiento

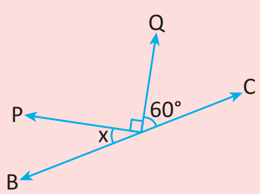
1. Sobre una recta se toma los puntos consecutivos A; B; C y D. Se sabe que AB = 10 cm; BC = CD y BD = 24 cm. Halla AC.

A) 18 cm B) 22 cm C) 18 cm D) 15 cm E) 30 cm

2. Dados los puntos consecutivos y colineales A, B, C y D tal que B es punto medio de $\overline{AC}$, además: CD =2BC y AD = 24 cm. Calcula AB.

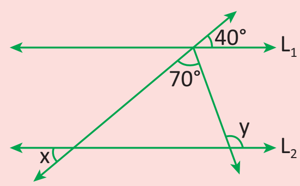
A) 8 cm B) 5 cm C) 10 cm D) 15 cm E) 6 cm

3. Calcula x.



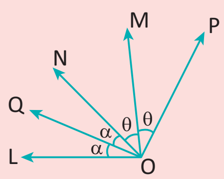
A) 50° B) 20° C) 30° D) 62° E) 60°

4. Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x + y.



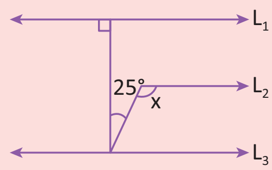
A) 120° B) 150° C) 160° D) 170° E) 145°

5. Si m∠LOP = 146°, halla m∠QOM.



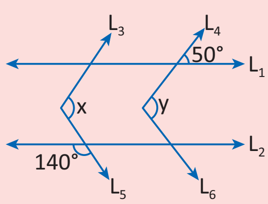
A) 74° B) 76° C) 70° D) 72° E) 73°

6. Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$, halla x.



A) 125° B) 120° C) 115° D) 116° E) 115,5°

7. Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$; $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_4}$; $\overleftrightarrow{L_5} \parallel \overleftrightarrow{L_6}$, calcula x+ y.



A) 120° B) 150° C) 180° D) 130° E) 142°

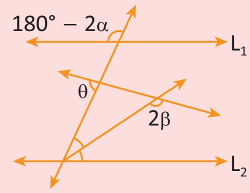
8. Si CS(α) = 50°, calcula: $C\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

A) 25° B) 22° C) 20° D) 26° E) 21°

9. Si el suplemento de un ángulo es igual a la mitad del ángulo, calcula el complemento de un tercio del ángulo.

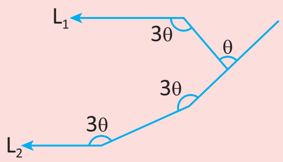
A) 60° B) 50° C) 30° D) 70° E) 80°

10. Calcula θ si $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$, y $\beta - \frac{\alpha}{2} = 56°$.



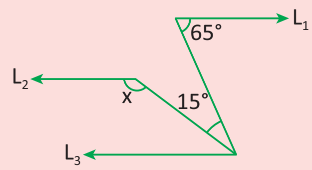
A) 68° B) 70° C) 66° D) 64° E) 62°

11. Calcula θ si $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$.



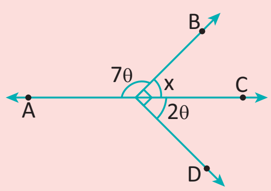
A) 47° B) 46° C) 45° D) 44° E) 48°

12. Si $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2} \,//\, \overleftrightarrow{L_3}$ calcula x.



A) 130° B) 127° C) 163° D) 140° E) 150°

13. En la figura halla el valor de x.



A) 54° B) 30° C) 48° D) 19° E) 35°

14. Sean A; B; C y D puntos colineales y consecutivos, de tal forma que AC = 12 cm y BD = 16 cm. Halla PQ si P es punto medio de $\overline{AB}$ y Q es punto medio de $\overline{CD}$, respectivamente.

A) 22 cm B) 20 cm C) 14 cm D) 18 cm E) 16 cm

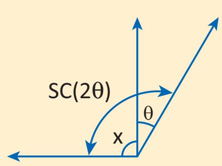
Claves

1. B
2. E
3. C
4. B
5. E
6. C
7. C
8. C
9. B
10. A
11. C
12. A
13. A
14. C

Reto



En la figura halla: $(x - \theta)$



Rpta.: 90°

Refuerza practicando

NIVEL 1

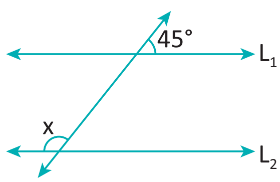
1. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A; B; C y D. Se sabe que: BD = 20 cm; AC = CD; AB = 12 cm. Halla BC.

   A) 7 cm B) 6 cm C) 8 cm D) 4 cm E) 5 cm

2. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A; B; C y D, se sabe que: AC = BD; CD = 2(BC) = 48 cm. Halla AB.

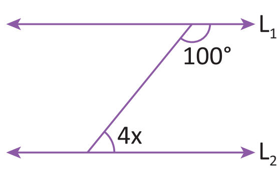
   A) 48 cm B) 30 cm C) 40 cm D) 50 cm E) 35 cm

3. Si las rectas $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ son paralelas, halla x.



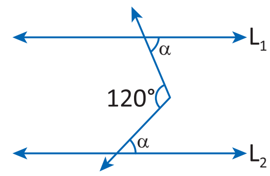
   A) 135° B) 130° C) 145° D) 160° E) 170°

4. Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.



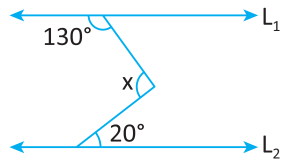
   A) 10° B) 20° C) 30° D) 40° E) 80°

5. En la figura, halla la medida del ángulo α si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



   A) 60° B) 30° C) 90° D) 10° E) 45°

6. Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.

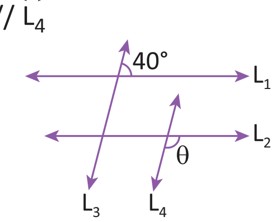


   A) 60° B) 70° C) 80° D) 90° E) 150°

7. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos: A; B; C y D. Se sabe que: AD = 5AB; CD = 3BC; AC = 36 m. Halla BD.

   A) 75 m B) 80 m C) 60 m D) 65 m E) 72 m

8. En la figura, halla la medida del ángulo θ si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$; $\overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_4}$



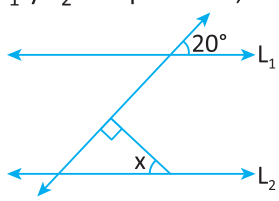
   A) 40° B) 140° C) 100° D) 80° E) 120°

9. Las medidas de dos ángulos adyacentes suplementarios se diferencian en 50°. Halla la medida del ángulo mayor.

A) 100° B) 105° C) 110° D) 115° E) 120°

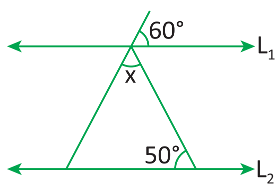
NIVEL 2

10. Si las rectas $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son paralelas, halla x.



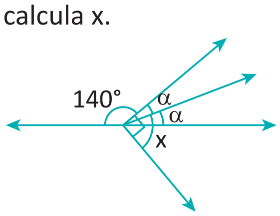
A) 20° B) 30° C) 45° D) 60° E) 70°

11. Si $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.



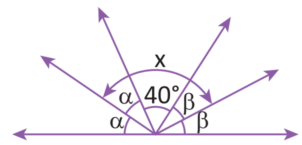
A) 80° B) 70° C) 60° D) 50° E) 40°

12. En el gráfico, calcula x.



A) 120° B) 70° C) 90° D) 80° E) 110°

13. Del gráfico, calcula x.

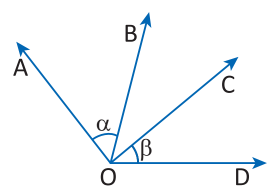


A) 120° B) 100° C) 90° D) 80° E) 110°

14. Calcula cuánto mide un ángulo, si la diferencia entre su suplemento y su complemento es 6 veces el valor de dicho ángulo.

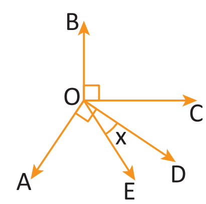
A) 21° B) 12° C) 48° D) 18° E) 15°

15. Calcula $\alpha - \beta$, si $m\angle AOC = 100°$ y $m\angle BOD = 60°$.



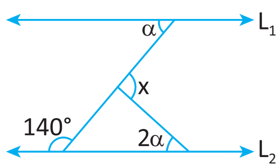
A) 30° B) 10° C) 20° D) 40° E) 50°

16. En la figura, $m\angle BOA = 140°$ y $m\angle COE = m\angle EOA$. Calcula x.



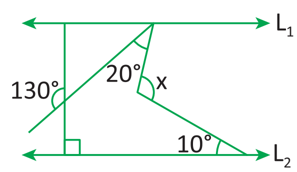
A) 25° B) 30° C) 35° D) 24° E) 32°

17. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.



A) 118° B) 105° C) 120° D) 124° E) 127°

18. Calcula x, si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



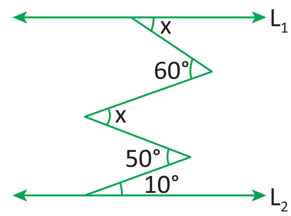
A) 60° B) 70° C) 80° D) 50° E) 65°

19. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos: A; B; C y D, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente.
Además: BC = 8 cm; AD = 30 cm. Halla MN.

A) 20 cm B) 19 cm C) 21 cm D) 22 cm E) 17 cm

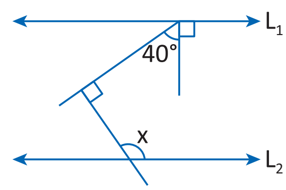
NIVEL 3

20. Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.



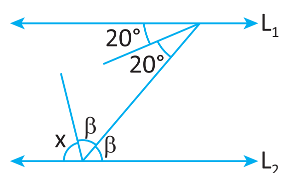
A) 120° B) 100° C) 80° D) 40° E) 50°

21. Según el gráfico, calcula el valor de x, si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



A) 110° B) 120° C) 140° D) 130° E) 150°

22. Según el gráfico calcula x, si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

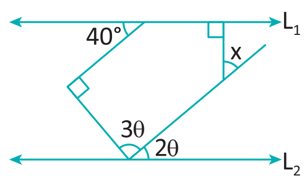


A) 100° B) 120° C) 80° D) 90° E) 110°

23. Un ángulo es tal que, la suma de su complemento y de su suplemento es igual al triple de dicho ángulo. Halla el suplemento del complemento de dicho ángulo.

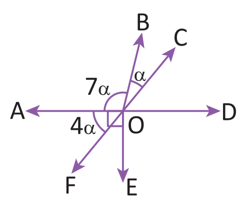
A) 54° B) 36° C) 126° D) 144° E) 162°

(24) En la figura, $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$, calcula x.



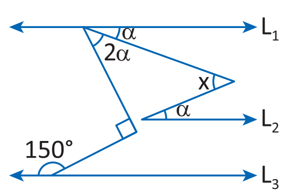
A) 36° B) 40° C) 52° D) 56° E) 38°

(25) Según la figura, calcula la m∠BOE.



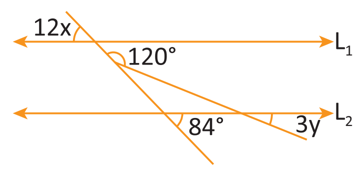
A) 150° B) 160° C) 165° D) 170° E) 145°

(26) En la figura, $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$ // $\overleftrightarrow{L_3}$, calcula x.



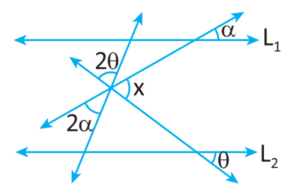
A) 45° B) 50° C) 48° D) 24° E) 40°

(27) De la figura, se tiene que $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$. Halla: $2x + y$



A) 23° B) 21° C) 22°
D) 24° E) 20°

(28) En la figura, si $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$, halla x.



A) 30° B) 60° C) 50°
D) 80° E) 90°

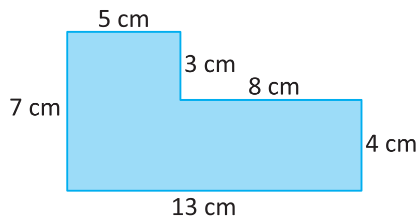
Claves

NIVEL 1			
1. D	9. D	17. C	25. C
2. A	NIVEL 2	18. B	26. E
3. A	10. E	19. B	27. C
4. B	11. B	NIVEL 3	28. B
5. A	12. B	20. A	
6. B	13. E	21. C	
7. E	14. E	22. A	
8. B	15. D	23. D	
	16. A	24. E	

Perímetros y áreas

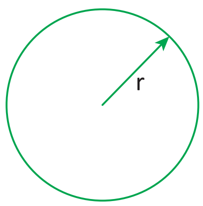
PERÍMETRO

Es la suma de los lados de una determinada figura geométrica.
Ejemplo:



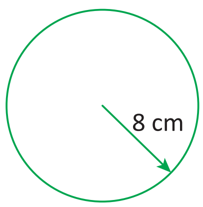
$2p = 7 + 5 + 3 + 8 + 4 + 13$
$2p = 40\text{ cm}$

Longitud de una circunferencia



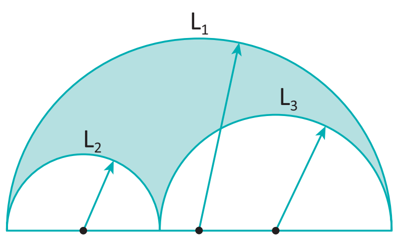
$L_C = 2\pi \cdot r$

Ejemplo:



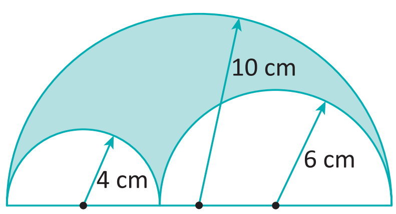
$L_C = 2\pi \cdot 8$
$L_C = 16\pi\text{ cm}$

Longitud para varias semicircunferencias



$L_{\text{figura sombreada}} = L_1 + L_2 + L_3$

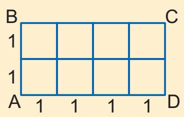
Ejemplo:



$L_{\text{figura sombreada}} = \pi.4 + \pi.6 + \pi.6$
$= 20\pi\text{ cm}$

Atención

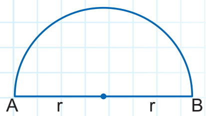
El perímetro de una región plana se denota como (2p) siendo p el semiperímetro.



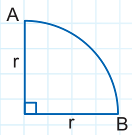
Perímetro de ABCD: 2p
$\Rightarrow 2p = 2 + 4 + 2 + 4 = 12$



Nota

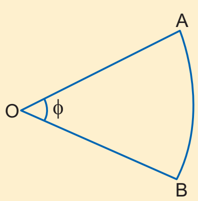


$L_{\overset{\frown}{AB}} = \pi \cdot r$



$L_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi \cdot r}{2}$

Recuerda



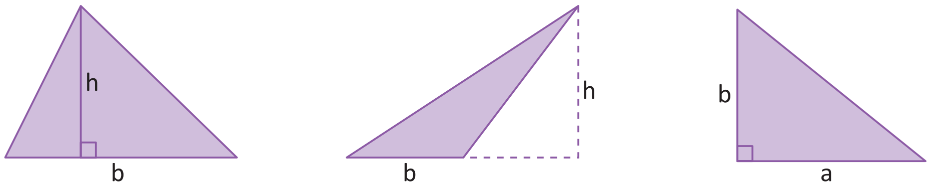
$L_{\overset{\frown}{AB}} = 2\pi r \cdot \dfrac{\phi}{360°}$



ÁREA

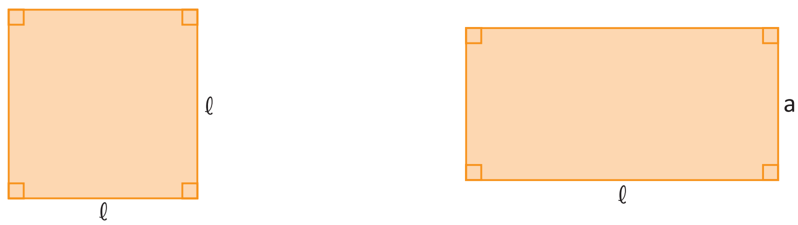
Es la medida de la figura geométrica. Se expresa en unidades cuadradas: cm^2, m^2, etc.

Áreas de figuras triangulares

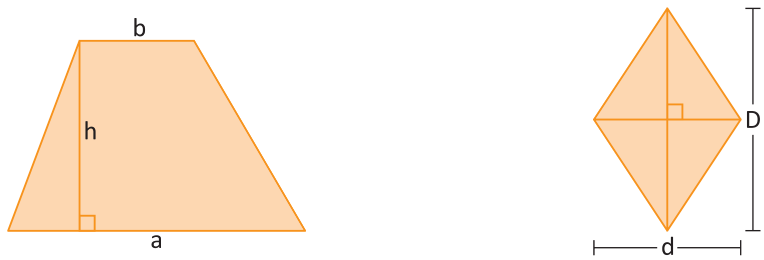


$A = \frac{b.h}{2}$ $\quad$ $A = \frac{b.h}{2}$ $\quad$ $A = \frac{a.b}{2}$

Áreas de regiones cuadrangulares

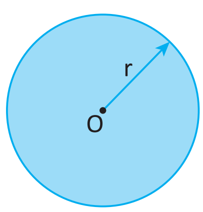


$A = \ell^2$ $\quad$ $A = \ell . a$



$A = \left(\frac{a+b}{2}\right).h$ $\quad$ $A = \frac{D.d}{2}$

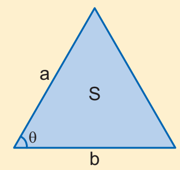
Áreas de regiones circulares



$A = \pi.r^2$

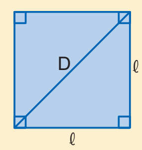


Atención



$S = \frac{a.b}{2}\text{sen}\theta$

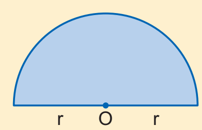
Recuerda



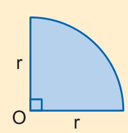
$A = \frac{D^2}{2}$



Importante



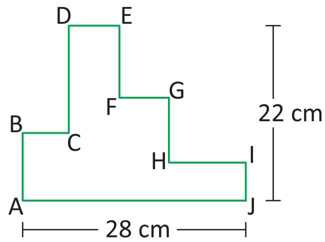
$A = \frac{\pi r^2}{2}$



$A = \frac{\pi r^2}{4}$

Problemas resueltos

1 Halla el perímetro de la figura.



Resolución:

Del gráfico:

$2p = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HI + IJ + JA$

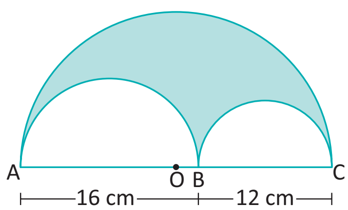
$2p = \underbrace{AB + CD + EF + GH + IJ}_{} + \underbrace{BC + DE + FG + HI + AJ}_{}$

$2p = \quad 22 \quad + \quad 22 \quad + \quad 28 \quad + \quad 28$

$2p = 44 + 56$

$\therefore\ 2p = 100$ cm

2 Halla el perímetro de la figura sombreada. Si AB; BC, AC son diámetros.



Resolución:

Según el gráfico:

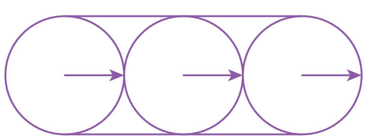
$2p = \ell_{\overset{\frown}{AB}} + \ell_{\overset{\frown}{BC}} + \ell_{\overset{\frown}{AC}}$

$2p = \dfrac{2\pi.8}{2} + \dfrac{2\pi.6}{2} + \dfrac{2\pi.14}{2}$

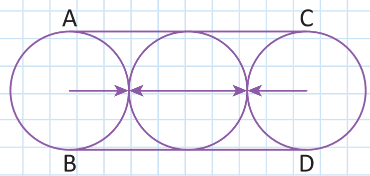
$2p = 8\pi + 6\pi + 14\pi$

$\therefore 2p = 28\pi$ cm

3 Halla la longitud de la cadena que sirve para atar las tres ruedas de la figura (r = 40 cm).



Resolución:



$L_{cadena} = \ell_{\overset{\frown}{AB}} + \ell_{\overset{\frown}{CD}} + AC + BD$

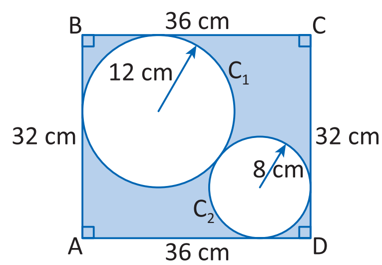
$L_{cadena} = \dfrac{2\pi.40}{2} + \dfrac{2\pi.40}{2} + 80 + 80$

$L_{cadena} = 40\pi + 40\pi + 160$

$L_{cadena} = 80\pi + 160$

$\therefore\ L_{cadena} = 80(\pi + 2)$ cm

4 Halla el perímetro de la región sombreada.



Resolución:

Del gráfico:

$2p = \ell_{C_1} + \ell_{C_2} + AB + BC + CD + AD$

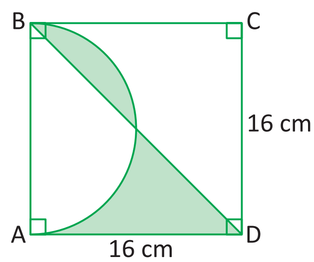
$2p = 2\pi\ .\ 12 + 2\pi\ .\ 8 + 32 + 36 + 32 + 36$

$2p = 24\pi + 16\pi + 68 + 68$

$2p = 40\pi + 136$

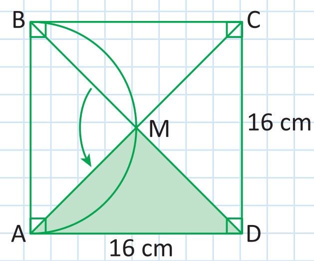
$\therefore 2p = 8(5\pi + 17)$ cm

5 Calcula el área de la siguiente región sombreada.



Resolución:

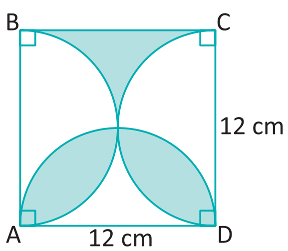
Trazamos la diagonal AC y trasladamos una parte de la región sombreada, así:



$$A_{sombreada} = A_{\Delta AMD} = \frac{16 \times 8}{2}$$

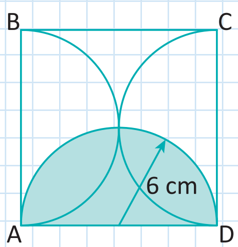
$\therefore A_{sombreada} = 64 \text{ cm}^2$

6 Halla el área de la región sombreada.
Si AB; AD y CD son diámetros.



Resolución:

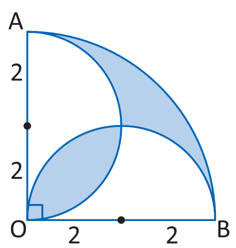
Trasladamos la región superior hacia abajo vemos que se forma una semicircunferencia.



$$A_{sombreada} = \frac{\pi . 6^2}{2}$$

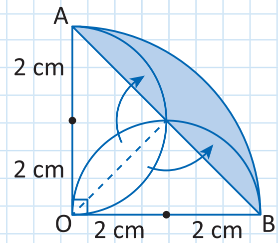
$\therefore A_{sombreada} = 18\pi \text{ cm}^2$

7 Halla el área de la región sombreada.



Resolución:

Trazamos $\overline{AB}$ y trasladamos una parte de la región sombreada.

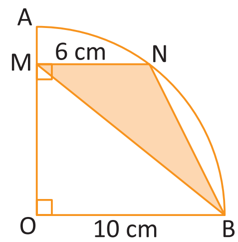


$A_{sombreada} = A_{\text{◺ AOB}} - A_{\triangle AOB}$

$= 4\pi - 8$

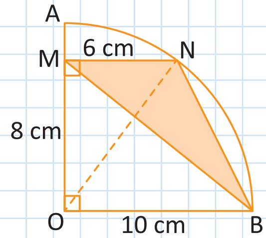
$= 4(\pi - 2) \text{ cm}^2$

8 Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:

Trazamos $\overline{ON}$.



El ΔOMN es un triángulo rectángulo.

Por Pitágoras: $MO^2 + MN^2 = ON^2$

$MO^2 + 6^2 = 10^2$

$MO^2 + 36 = 100$

$MO^2 = 64$

$MO = 8 \text{ cm}$

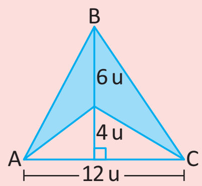
Finalmente:

$$A_{sombreada} = \frac{6 \times 8}{2}$$

$= 24 \text{ cm}^2$

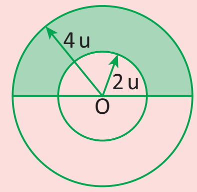
Actividades de razonamiento

1. Calcula el área de la región sombreada.



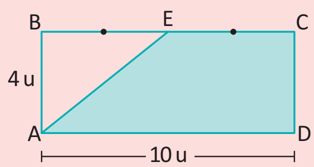
A) 35 u^2 B) 40 u^2 C) 20 u^2 D) 46 u^2 E) 36 u^2

2. En la figura tenemos dos circunferencias concéntricas en O, de radios 4 u y 2 u. Halla el área de la región sombreada.



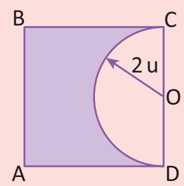
A) 6π u^2 B) 8π u^2 C) 2π u^2 D) 6π u^2 E) 4π u^2

3. En la figura tenemos el rectángulo ABCD. Halla el área de la región sombreada.



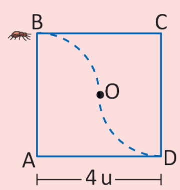
A) 50 u^2 B) 40 u^2 C) 30 u^2 D) 10 u^2 E) 20 u^2

4. En la figura tenemos el cuadrado ABCD y una semicircunferencia con centro en O y radio 2 u. Halla el perímetro de la región sombreada.



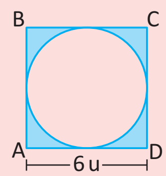
A) $2(6 + \pi)$ u B) $2\pi + 3$ u C) $2(\pi + 3)$ u
D) $2(5 + \pi)$ u E) $3\pi + 4$ u

5. Una hormiga se traslada desde el punto B hasta el punto D siguiendo la trayectoria representada por las líneas punteadas. Halla la longitud de dicha trayectoria, si ABCD es un cuadrado y $\overset{\frown}{BO}$, $\overset{\frown}{OD}$ son cuartos de circunferencias.
(O es centro del cuadrado).



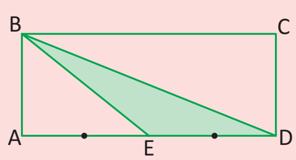
A) $(2\pi + 3)$ u B) 3π u C) π u D) $(\pi + 4)$ u E) 2π u

6. Halla el área de la región sombreada, donde ABCD es un cuadrado.



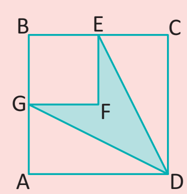
A) 4π u^2 B) $(2 + \pi)$ u^2 C) $(3\pi - 5)$ u^2
D) $9(4 - \pi)$ u^2 E) $5(5 - \pi)$ u^2

7. Si el área de la región sombreada es 20 u^2, halla el área del rectángulo ABCD.



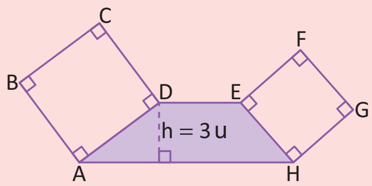
A) 60 u^2 B) 40 u^2 C) 35 u^2 D) 50 u^2 E) 30 u^2

8. Sean ABCD y GBEF son cuadrados de lado 8 u y 4 u respectivamente, halla el área de la región sombreada.



A) 20 u^2 B) 25 u^2 C) 48 u^2 D) 16 u^2 E) 10 u^2

9. Sean ABCD y EFGH cuadrados de lados 5 u y 4 u respectivamente. Además ADEH es un trapecio, cuya área es 30 u^2 y la altura 3 u, halla el perímetro de la figura sombreada.



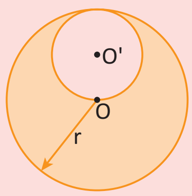
A) 39 u B) 29 u C) 25 u D) 34 u E) 24 u

10. Una mesa tiene las siguientes dimensiones, halla el área de la región sombreada. (r = 2 u; AD = 8 u)



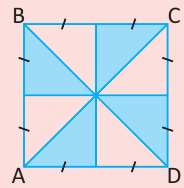
A) $4(8 + \pi)\ u^2$ B) $6(4 + \pi)\ u^2$ C) $(2\pi + 1)\ u^2$
D) $7(7 + \pi)\ u^2$ E) $3(5 + \pi)\ u^2$

11. Halla el área de la región sombreada. (r = 4 u; O y O' son centros de las circunferencias)



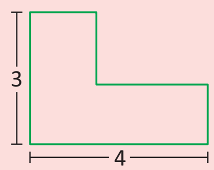
A) $13\pi\ u^2$ B) $4\pi\ u^2$ C) $12\pi\ u^2$ D) $18\pi\ u^2$ E) $16\pi\ u^2$

12. Halla el área de la región sombreada si, ABCD es un cuadrado. (AB = 4 u)



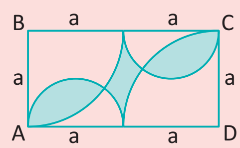
A) $15\ u^2$ B) $8\ u^2$ C) $4\ u^2$ D) $16\ u^2$ E) $12\ u^2$

13. Calcula el perímetro de:



A) 7 B) 12 C) 10 D) 14 E) 21

14. Halla el perímetro de la figura sombreada si ABCD es rectángulo.



A) $3\pi a$ B) $2\pi a$ C) πa D) $4\pi a$ E) $5\pi a$

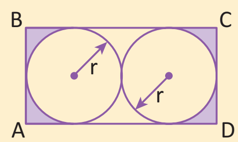
Claves

1. E	5. E	9. B	13. D
2. D	6. D	10. A	14. B
3. C	7. B	11. C	
4. A	8. D	12. B	

Reto



Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo (r = 2 u).

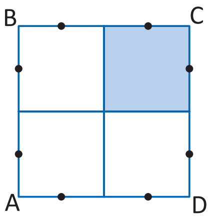


Rpta.: $4(4 - \pi)\ u^2$

Refuerza practicando

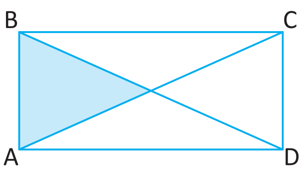
NIVEL 1

1. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado de lado 4 u.



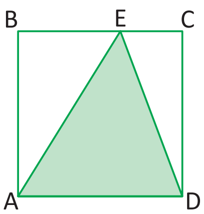
A) 8 u^2
B) 4 u^2
C) 2 u^2
D) 6 u^2
E) 1 u^2

2. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo cuya área es 40 u^2.



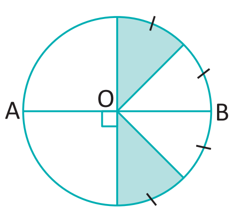
A) 18 u^2
B) 15 u^2
C) 10 u^2
D) 12 u^2
E) 20 u^2

3. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 6 u.



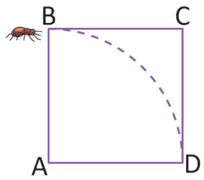
A) 10 u^2
B) 16 u^2
C) 12 u^2
D) 20 u^2
E) 18 u^2

4. Halla el área de la región sombreada, si O es centro de la circunferencia cuyo radio es 4 u.



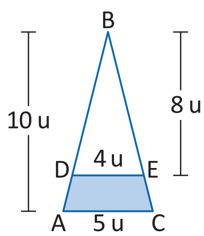
A) 10π u^2
B) 8π u^2
C) 6π u^2
D) 4π u^2
E) 2π u^2

5. Una hormiga se traslada de B hacia D siguiendo la trayectoria representada por las líneas punteadas. Halla la longitud de dicha trayectoria, si ABCD es un cuadrado de lado 6 u. ($\overset{\frown}{BD}$ es un cuarto de circunferencia).



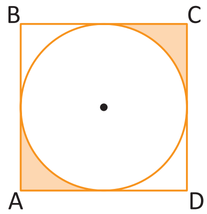
A) 3π u
B) 5π u
C) 10π u
D) 6π u
E) 8π u

6. Halla el área de la región sombreada si ADEC es un trapecio.



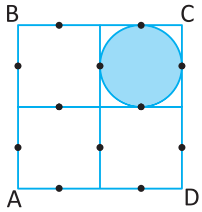
A) 8 u^2
B) 7 u^2
C) 9 u^2
D) 6 u^2
E) 10 u^2

7. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado de lado 2 u.



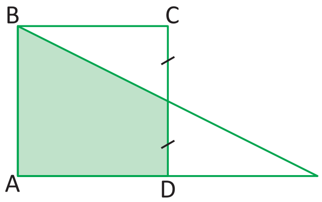
A) $(1 + 2\pi)$ u^2
B) $(\pi + 1)$ u^2
C) $(2 - \frac{\pi}{2})u^2$
D) $(2 + \pi)$ u^2
E) $(\pi - 2)$ u^2

8. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado de lado 8 u.



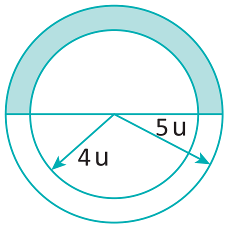
A) 5π u^2
B) 3π u^2
C) 2π u^2
D) 4π u^2
E) 16π u^2

9. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado de lado 6 u.



A) 20 u^2
B) 36 u^2
C) 15 u^2
D) 18 u^2
E) 27 u^2

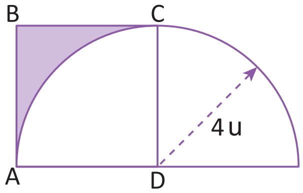
10. Halla el perímetro de la región sombreada.



A) $(9\pi + 2)$ u
B) $(3\pi + 4)$ u
C) 9π u
D) $(6\pi - 1)$ u
E) $(2\pi + 5)$ u

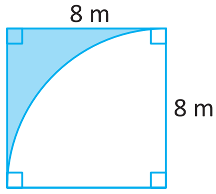
NIVEL 2

11. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado.



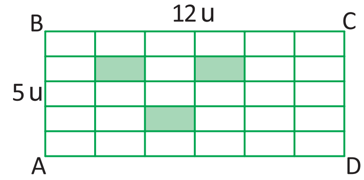
A) $2(\pi - 2)$ u^2
B) $4(4 - \pi)$ u^2
C) $(4 - \pi)$ u^2
D) $3(\pi + 3)$ u^2
E) $2(2 + \pi)$ u^2

12. Halla el área de la región sombreada.



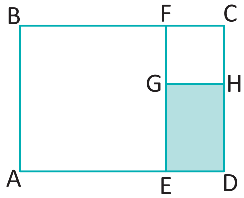
A) $16(4 - \pi)$ m^2
B) $8(4 - \pi)$ m^2
C) $8(6 - \pi)$ m^2
D) $16(\pi - 1)$ m^2
E) $16(\pi - 2)$ m^2

13. El rectángulo ABCD ha sido dividido en partes iguales, halla el área de la región sombreada.



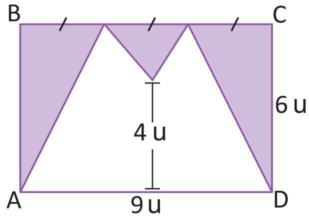
A) 12 u^2
B) 2 u^2
C) 8 u^2
D) 4 u^2
E) 6 u^2

14. Halla el área de la región sombreada, si ABFE y GFCH son cuadrados de lado 5 u y 2 u respectivamente.



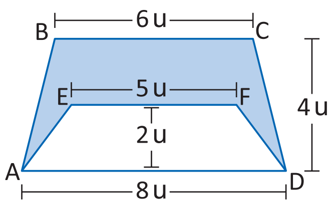
A) 15 u^2
B) 8 u^2
C) 12 u^2
D) 6 u^2
E) 10 u^2

15. Halla el área de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo.



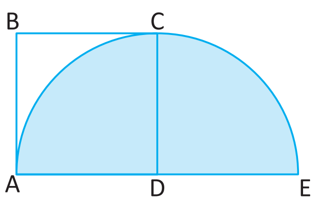
A) 24 u^2
B) 15 u^2
C) 12 u^2
D) 21 u^2
E) 18 u^2

16) Halla el área de la región sombreada, si ABCD y AEFD son trapecios.



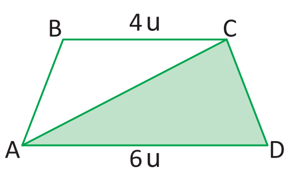
A) 22 u^2
B) 20 u^2
C) 25 u^2
D) 21 u^2
E) 15 u^2

17) Si el área de la región cuadrada ABCD es 36 u^2, halla el área de la región sombreada.



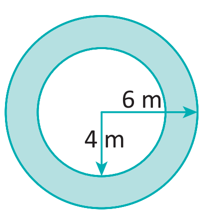
A) 32π u^2
B) 18π u^2
C) 36π u^2
D) 25π u^2
E) 20π u^2

18) Si el área de la región trapecial ABCD es 25 u^2, halla el área de la región triangular ACD.



A) 10 u^2
B) 15 u^2
C) 18 u^2
D) 5 u^2
E) 20 u^2

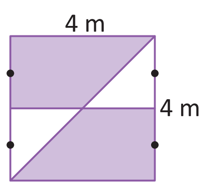
19) Halla el área de la región sombreada.



A) 12π m^2
B) 14π m^2
C) 16π m^2
D) 18π m^2
E) 20π m^2

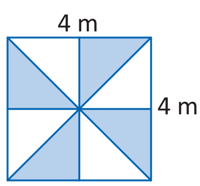
NIVEL 3

20) Halla el área de la región sombreada.



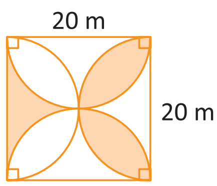
A) 4 m^2
B) 6 m^2
C) 8 m^2
D) 10 m^2
E) 12 m^2

21) Halla el área de la región sombreada.



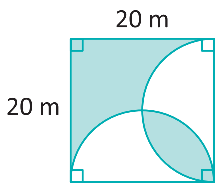
A) 10 m^2
B) 8 m^2
C) 6 m^2
D) 14 m^2
E) 12 m^2

22) Halla el área de la región sombreada.



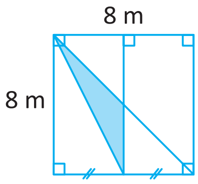
A) 40π m^2
B) 50π m^2
C) 60π m^2
D) 30π m^2
E) 448π m^2

23) Halla el área de la región sombreada.



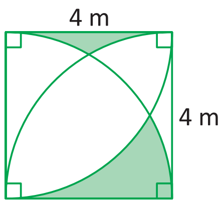
A) 400 m^2
B) 200 m^2
C) 300 m^2
D) 150 m^2
E) 250 m^2

24. Halla el área de la región sombreada.



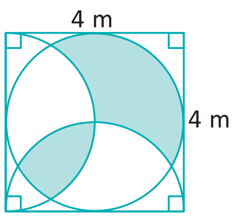
A) 8 m^2
B) 16 m^2
C) 18 m^2
D) 22 m^2
E) 36 m^2

25. Halla el área de la región sombreada.



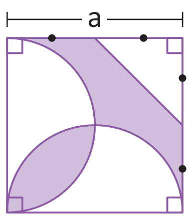
A) $2(4-\pi)$ m^2
B) $8(4-\pi)$ m^2
C) $6(9-\pi)$ m^2
D) $4(4-\pi)$ m^2
E) $4(8-\pi)$ m^2

26. Halla el área de la región sombreada.



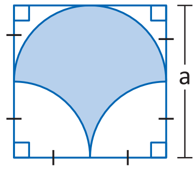
A) 3π m^2
B) 2π m^2
C) 4π m^2
D) 6π m^2
E) 8π m^2

27. Halla el área de la región sombreada.



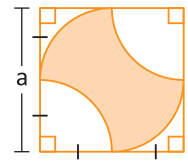
A) $\frac{3}{5}a^2$ B) $\frac{4}{5}a^2$ C) $\frac{8}{9}a^2$ D) $\frac{3}{8}a^2$ E) $\frac{6}{7}a^2$

28. Calcula el área de la región sombreada.



A) $\frac{a^2}{2}$ B) $\frac{a^2}{3}$ C) $\frac{2a^2}{3}$ D) $\frac{2a^2}{5}$ E) $\frac{4a^2}{7}$

29. Halla el área de la región sombreada.



A) $\frac{3a^2}{5}$ B) $\frac{2a^2}{3}$ C) $\frac{a^2}{2}$ D) $\frac{a^2}{3}$ E) $\frac{a^2}{4}$

Claves

NIVEL 1
1. B
2. C
3. E
4. D
5. A
6. C
7. C
8. D
9. E
10. A

NIVEL 2
11. B
12. A
13. E
14. D
15. D
16. E
17. B
18. B
19. E

NIVEL 3
20. E
21. B
22. B
23. B
24. A
25. D
26. B
27. D
28. A
29. C

Análisis combinatorio

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Llamamos así al producto que resulta de multiplicar todos los números enteros y positivos consecutivamente desde la unidad hasta el número inclusive. Se representa de la siguiente manera:

$$n! \quad \text{o} \quad \underline{|n}$$

Se lee: factorial de n o n factorial.

- $1! = 1$
- $2! = 1 \,.\, 2 = 2$
- $3! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 6$
- $4! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24$
- $5! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 120$
- $6! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 = 720$
- $7! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 = 5040$
- $8! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 = 40\,320$

En general:

$n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \ldots (n-3)(n-2)(n-1)n$

Propiedad

$$n! = n \times (n-1)!$$

Ejemplos:

1. Reduce:

$$M = \frac{32! \times 15!}{16! \times 31!}$$

Resolución:

$$M = \frac{32 \times 31! \times 15!}{16 \times 15! \times 31!}$$

$$M = \frac{32}{16} = 2$$

2. Calcula:

$$P = \frac{19!}{18!} + \frac{28!}{27!}$$

Resolución:

$$P = \frac{19 \times 18!}{18!} + \frac{28 \times 27!}{27!}$$

$P = 19 + 28$

$P = 47$

Observación

- Convencionalmente el factorial de 0 se considera igual a 1.

  $0! = 1$

- La notación más usada es: !



Ten en cuenta

- $(a + b)! \neq a! + b!$
- $(a - b)! \neq a! - b!$
- $(a \times b)! \neq a! \times b!$
- $(a \times b)! \neq a \times b!$



Importante

Para simplificar factoriales, se descompone el factorial del número mayor en términos del menor, así:

$16! = 16 \times 15!$

$25! = 25 \times 24!$

$31! = 31 \times 30!$

3. Efectúa:

$$N = \frac{18! - 17!}{16!}$$

Resolución:

$$N = \frac{18!}{16!} - \frac{17!}{16!}$$

$$N = \frac{18 \times 17 \times 16!}{16!} - \frac{17 \times 16!}{16!}$$

$$N = 18 \times 17 - 17$$

$$N = 17 \times 17$$

$$N = 289$$

4. Halla:

$$Q = \frac{99!}{97! + 98!}$$

Resolución:

$$Q = \frac{99 \times 98 \times 97!}{97! + 98 \times 97!}$$

$$Q = \frac{99 \times 98 \times 97!}{97!(1 + 98)}$$

$$Q = \frac{99 \times 98}{99}$$

$$Q = 98$$

PRINCIPIOS DE CONTEO

Principio de adición

Si un evento A ocurre de m maneras diferentes y otro evento B ocurre de n maneras diferentes, entonces el evento A o el evento B ocurre de m + n maneras.

Ejemplo:

Paolín va de su casa al colegio. Si puede viajar empleando 5 líneas de microbuses y 4 líneas de colectivos. ¿De cuántas maneras distintas puede realizar el viaje?

Resolución:

Como el viaje podría hacerlo en microbuses o en colectivo, entonces:

$$\text{n.° de maneras} = 5 + 4 = 9$$

Microbús → 5

Colectivo → 4

Principio de multiplicación

Si un evento A ocurre de m maneras diferentes y después de ocurrido dicho evento, otro evento B ocurre de n maneras diferentes, entonces ambos eventos podrán ocurrir de $m \times n$ maneras.

Ejemplo:

Para ir de Los Olivos a Breña, Sofía puede emplear 5 rutas diferentes, y para ir de Breña a Lince puede emplear 4 rutas diferentes. ¿De cuántas maneras diferentes Sofía podrá ir de Los Olivos a Lince, si siempre debe hacer una escala en Breña?

Resolución:

Hay 5 rutas para ir de Los Olivos a Breña.

Hay 4 rutas para ir de Breña a Lince.

Entonces, el número de maneras para realizar el viaje será: $5 \times 4 = 20$

VARIACIONES

Son los diferentes grupos que se pueden formar con m elementos, tomados de n en n, de tal manera que cada grupo se diferencia de otro por lo menos en un elemento, o por el orden en el cual se ha dispuesto dichos elementos.

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!} \quad ; m > n > 0$$

Atención

En forma práctica:

En una variación, el número superior se descompone en tantos factores como indica el número inferior.

- $V_2^8 = 8 \times 7 = 56$
- $V_3^{10} = 10 \times 9 \times 8 = 720$
- $V_4^9 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$





Atención

En forma práctica:
En una combinación, el número superior se descompone en tantos factores como indica el número inferior y en el denominador va el producto desde 1 hasta el número inferior.

- $C_3^5 = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$
- $C_4^7 = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 35$
- $C_2^{10} = \dfrac{10 \times 9}{1 \times 2} = 45$



Observación

Sean los elementos a; b y c, las permutaciones de estos elementos serán:

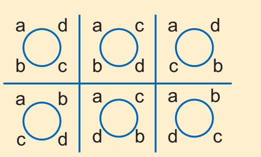
abc; bca; cab; cba; bac; acb

Por lo tanto, el número total de permutaciones será 6.
Es decir: $P_3 = 3!$



Observación

Sean los elementos a; b; c y d; la permutación circular de los mismos alrededor de un círculo será:



Por lo tanto, el número total de permutaciones es 6.
Es decir:

$PC_4 = (4 - 1)! = 3!$

Ejemplos:

- $V_2^8 = \dfrac{8!}{(8-2)!} = \dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 56$
- $V_3^{10} = \dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$
- $V_4^9 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 3024$
- $V_5^{11} = \dfrac{11!}{(11-5)!} = \dfrac{11!}{6!} = \dfrac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 55\,440$

COMBINACIONES

Son los diferentes grupos que se pueden formar con m elementos tomados de n en n, de tal manera que dos grupos se diferencian entre sí, al menos en un elemento. No se toma en cuenta el orden en el que están ubicados los elementos.

$$C_n^m = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}\ ;\ m > n > 0$$

Ejemplos:

- $C_3^5 = \dfrac{5!}{(5-3)!\,3!} = \dfrac{5!}{2!\,3!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = 10$
- $C_4^7 = \dfrac{7!}{(7-4)!\,4!} = \dfrac{7!}{3!\,4!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$
- $C_2^{10} = \dfrac{10!}{(10-2)!\,2!} = \dfrac{10!}{8!\,2!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8!}{8! \times 2 \times 1} = 45$
- $C_4^9 = \dfrac{9!}{(9-4)!\,4!} = \dfrac{9!}{5!\,4!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$

PERMUTACIONES

Son los diferentes grupos que se pueden formar con todos los elementos que presenta cierto conjunto, de tal manera que cada grupo se diferencia de otro solamente en el orden en el que se ubican los elementos.

$P_n = n!$ Número de permutaciones de "n" elementos

Ejemplos:

- $P_3 = 3! = 6$
- $P_5 = 5! = 120$
- $P_7 = 7! = 5040$
- $P_8 = 8! = 40\,320$

PERMUTACIONES CIRCULARES

Son aquellos grupos formados alrededor de una línea cerrada, donde no hay primer ni último elemento.

$PC_n = (n-1)!$ Número de permutaciones circulares de "n" elementos

Ejemplos:

- $PC_3 = (3-1)! = 2! = 2$
- $PC_5 = (5-1)! = 4! = 24$
- $PC_7 = (7-1)! = 6! = 720$
- $PC_8 = (8-1)! = 7! = 5040$

Problemas resueltos

1 Determina el valor de n en:
$(n + 3)! = 120$

Resolución:

$(n + 3)! = 120 = 5!$
$n + 3 = 5$
$\Rightarrow n = 2$

2 Determina el valor de:
$M = \dfrac{10! + 8!}{8!}$

Resolución:

$M = \dfrac{8!.9.10 + 8!}{8!}$

$M = \dfrac{8!(90 + 1)}{8!} \Rightarrow M = 91$

3 ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con las letras de la palabra MIRA?

Resolución:

En la palabra MIRA hay 4 letras, luego:

$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

∴ Se pueden formar 24 palabras diferentes.

4 Las cuatro regiones de un mapa deben llevar diferente color. ¿De cuántas maneras se pueden colorear, si se disponen de 6 colores diferentes?

Resolución:

Como para pintar las regiones se usarán algunos colores a la vez, se trata de una variación.

$V_4^6 = \dfrac{6!}{(6-4)!}$

$V_4^6 = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360$

Luego, se podrá pintar el mapa de 360 maneras diferentes.

5 Ernesto tiene 10 billetes de diferentes valores, ¿cuántas maneras distintas de agrupar los billetes se pueden formar tomados de 3 en 3?

Resolución:

Como no importa el orden, se trata de una combinación:

$C_3^{10} = \dfrac{10!}{3!(10-3)!}$

$C_3^{10} = \dfrac{10!}{3!\ 7!}$

$C_3^{10} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 7!} = 120$

6 ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un estante 5 libros?

Resolución:

Para saber de cuántas maneras se pueden colocar 5 libros en un estante, usaremos una permutación.

$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

7 En un restaurante hay 10 comidas diferentes. Entran 3 personas y cada una pide un plato diferente a la otra. ¿De cuántas maneras se puede hacer el pedido?

Resolución:

El problema se trata de una variación:
– 10 comidas diferentes
– 3 personas

$V_3^{10} = \dfrac{10!}{(10-3)!}$

$V_3^{10} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$

∴ El pedido se puede hacer de 720 maneras diferentes.

8 ¿Cuántas ensaladas, que contengan 4 frutas, podemos hacer si disponemos de 10 frutas diferentes?

Resolución:

Se trata de una combinación:

$C_4^{10} = \frac{10!}{4!(10-4)!}$ | $C_4^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 6!}$

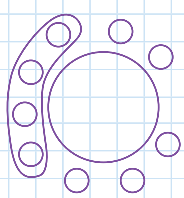
$C_4^{10} = \frac{10!}{4!6!}$ | $C_4^{10} = 210$

$\therefore$ Se pueden hacer 210 ensaladas.

9 La familia Gonzales, formada por el señor Gonzales, la señora Gonzales y dos hijos, tiene la costumbre que cuando almuerzan con otras personas, los cuatro se sientan juntos. Si la familia Gonzales ha invitado a almorzar a un grupo de 5 amigos, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden sentar las personas alrededor de una mesa circular?

Resolución:

Familia Gonzales



Los 4 miembros de la familia Gonzales pueden acomodarse (juntos) de 4! formas. Fijando este grupo, los 5 amigos invitados pueden acomodarse de 5! formas. En total, las 9 personas pueden acomodarse de:

$4! \times 5!$ formas distintas

10 Con los siguientes dígitos {1; 3; 5; 8 y 9}, ¿cuántos números de 3 ciras diferentes mayores que 300 se pueden formar?

Resolución:

Dígitos:{1; 3; 5; 8; 9}

Para: $N = \overline{abc}$

Como $N > 300 \Rightarrow$ **a** puede ser 3; 5; 8 ó 9. Hay 4 posibilidades.

b puede tomar cualquier valor, pero como **a** ya tomó un valor, entonces de los 5 posibles valores del conjunto, solo quedan 4 posibilidades.

c también puede adoptar cualquier valor; pero como a , b ya toman un valor cada uno, solo quedan 3 posibilidades.

Luego, en total hay: 4 . 4 . 3 números.

Es decir: 48 números

11 En una carrera de motos hay 8 participantes, ¿de cuántas maneras diferentes podrán cruzar la meta uno a continuación de otro?

Resolución:

Como los participantes cruzan la meta uno detrás de otro, estamos ante una permutación.

Calculando la permutación de 8 elementos:

$P_8 = 8! = 40\,320$

12 En una carrera de 100 m participan 6 atletas. ¿De cuántas maneras diferentes podrán llegar los 3 primeros a la meta, si no hay empates?

Resolución:

Se trata de una variación de 6 elementos tomados de 3 en 3:

$$V_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

$\therefore$ 3 atletas podrán llegar a la meta sin que halla empate, de 120 maneras diferentes.

13 Con los siguientes dígitos {2; 3; 5; 7: 8}, ¿cuántos números de tres cifras mayores que 527 se pueden tomar si no se permiten repetición de dígitos?

Resolución:

Dígitos: 2; 3; 5; 7; 8

$N = \overline{abc} \ \wedge \ N > 527$

1.er caso: $N = \overline{5bc}$

Si: $b = 2 \Rightarrow c = 8$ (1 número)

Si: $b = 3 \Rightarrow c = 2; 7; 8$ (3 números)

$b = 7 \Rightarrow c$ tiene 3 opciones

$b = 8 \Rightarrow c$ tiene 3 opciones

En total hay 10 números.

2.° caso: $N = \overline{a\ b\ c}$

a	b	c
↓	↓	↓
7	:	:
8	:	:

2 . 4 . 3 = 24 números

Actividades de razonamiento

1. Simplifica:

$$H = \frac{12! + 11! + 10!}{10! + 11!}$$

A) 15 B) 10 C) 12 D) 11 E) 13

2. Halla el valor de la siguiente suma:

$$M = C_3^5 + C_2^5 + C_1^5$$

A) 30 B) 27 C) 15 D) 25 E) 20

3. Reduce:

$$R = \frac{\left[(1! + 2)! + 3\right]!}{\left[1! + 2! + 3!\right]!}$$

A) 3 B) 6 C) 8 D) 1 E) 2

4. Halla el valor de la siguiente suma:

$$N = \frac{V_6^7 + V_5^6 + V_4^5}{V_1^5}$$

A) 55 B) 49 C) 52 D) 60 E) 45

5. Halla el valor de x: $(2x - 5)! = 6$

A) 4 B) 6 C) 10 D) 8 E) 3

6. Halla el valor de x:

$$\frac{6!}{10} = \frac{x!\,12!}{11!}$$

A) 7 B) 3 C) 2 D) 6 E) 4

7. Halla el valor de la suma:
$S = 1 \,.\, 1! + 2 \,.\, 2! + 3 \,.\, 3! + ... + 10 \,.\, 10!$

A) 10! B) 11! C) 10! + 1 D) 12! E) 11! – 1

8. Una biblioteca tiene 40 libros de Historia y 50 de Filosofía. Si un estudiante quiere aprender acerca de alguno de estos dos temas, ¿de cuántas formas podrá hacerlo?

A) 150 B) 60 C) 120 D) 90 E) 80

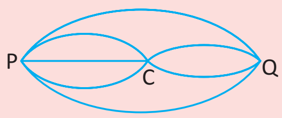
9. Para una obra de teatro hay 6 hombres y 8 mujeres que aspiran a los papeles principales. ¿De cuántas formas el director podrá elegir a la pareja principal?

A) 40 B) 20 C) 50 D) 48 E) 38

10. Para enviar un artículo al mercado, pasa por 3 controles de calidad, en cada una se inspecciona una cierta particularidad y se anota su conformidad, en el primer control hay 4 exámenes, en el segundo control hay 3 exámenes, y en el tercer control hay 2 exámenes. ¿De cuántas maneras se puede controlar la calidad de un producto?

A) 28 B) 30 C) 24 D) 20 E) 26

11. ¿De cuántas maneras se puede ir de P hacia Q?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 7 E) 6

12. ¿Cuántas comités de 3 miembros se pueden escoger en un club de 12 miembros?

A) 180 B) 220 C) 200 D) 210 E) 100

13. Si 4 amigos van al cine y encuentran una hilera de 10 butacas, ¿de cuántas maneras distintas se podrán sentar?

A) 6400 B) 3200 C) 5320 D) 4800 E) 5040

14. Cinco niños juegan a la ronda, ¿de cuántas maneras distintas podrán ubicarse?

A) 24 B) 12 C) 16 D) 18 E) 30

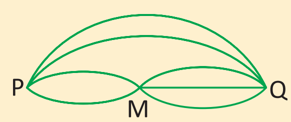
Claves

1. C	5. A	9. D	13. E
2. D	6. B	10. C	14. A
3. D	7. E	11. A	
4. B	8. D	12. B	

Reto



¿De cuántas maneras se puede ir de P a Q y luego retornar por una ruta diferente?



Rpta.: 38

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Simplifica: $H = \dfrac{0! + 1! + 2!}{0! + 1!}$

A) 6 B) 4 C) 2 D) 5 E) 1

2. Simplifica: $E = \dfrac{3! + 6!}{11}$

A) 72 B) 67 C) 68 D) 70 E) 66

3. Simplifica: $A = \dfrac{4! + 5!}{2! + 2!}$

A) 40 B) 35 C) 34 D) 36 E) 38

4. Simplifica: $P = \dfrac{12! + 13!}{11! + 10!}$

A) 154 B) 164 C) 140 D) 138 E) 145

5. Simplifica: $R = \dfrac{6! \times 8!}{5! \times 7!} + \dfrac{10! \times 12}{10! + 11!}$

A) 55 B) 49 C) 45 D) 47 E) 52

6. Simplifica: $P = \dfrac{22! + 21! + 20!}{20! + 21!}$

A) 18 B) 24 C) 20 D) 26 E) 22

7. Halla el valor de x en la igualdad: $(2x - 1)! = 120$

A) 1 B) 6 C) 2 D) 3 E) 4

8. Halla el valor de x en: $\dfrac{10}{3} = \dfrac{x! \times 20!}{19! \times 6!}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

9. Simplifica: $G = \dfrac{1! \times 8! + 9! + 10! \times 0!}{0! \times 8! + 8! \times 9}$

A) 14 B) 8 C) 10 D) 9 E) 12

10. Simplifica la operación: $D = \dfrac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \ldots \times 30}{15 \times 14!}$

A) 2^{30} B) 2^{14} C) 2^{15} D) 2^{10} E) $2^{15}-1$

NIVEL 2

11. Si $(x - 2)! = 1$, halla la suma de los valores de x.

A) 7 B) 8 C) 6 D) 4 E) 5

12. Halla el valor de:
$H = 1 . 1! + 2 . 2! + 3 . 3! + \ldots + 15 . 15!$

A) $16! + 1$ B) $15! + 1$ C) $16!$
D) $17!$ E) $16! - 1$

13. Halla el valor de x en: $x! + (x - 1)! = 8! \times 10$

A) 9 B) 7 C) 6 D) 10 E) 8

14. De la siguiente igualdad determina el valor de a: $(a! + 1!)! = 7!$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 4

15. Halla el valor de: $U = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times ... \times 20$

A) $2^9 . 9!$ B) $2 . 10!$ C) $2^{10} . 9!$
D) $2 . 11!$ E) $2^{10} . 10!$

16. Un individuo va a comer a un restaurante y al ver el menú observa que hay 3 guisos de carne de res, 4 de aves, 2 de verduras y uno de pescado. ¿De cuántas formas puede ordenar su guiso?

A) 12 B) 11 C) 8 D) 10 E) 9

17. Juan decide viajar en tren o en ómnibus. Si hay 3 rutas para el tren y 4 para el ómnibus, ¿de cuántas maneras podrá viajar Juan?

A) 5 B) 10 C) 7
D)6 E) 8

18. ¿Cuántas parejas de baile se pueden formar con 6 varones y 8 mujeres?

A) 48 B) 46 C) 52
D) 49 E) 50

19. Grecia tiene 3 polos diferentes y 4 faldas también distintas. ¿De cuántas maneras se puede vestir?

A) 18 B) 16 C) 12
D) 20 E) 14

20. ¿De cuántas maneras se puede ir de P a Q?



A) 12 B) 6 C) 5
D) 8 E) 4

NIVEL 3

21. Una alumna tiene para vestirse: 4 blusas, 3 pantalones, 2 faldas y 6 pares de zapatos. ¿De cuántas formas se podrá vestir?

A) 140 B) 90 C) 100
D) 110 E) 120

22. ¿Cuántos grupos diferentes de 3 delegados se pueden elegir entre 8 candidatos?

A) 48 B) 58 C) 56
D) 64 E) 50

23. Con 4 banderas de diferentes colores, ¿cuántas señales diferentes de dos banderas se pueden realizar?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 5

24. Con las frutas: papaya, naranja, melocotón, piña, plátano, fresa y coco, ¿cuántos jugos de tres frutas diferentes se pueden hacer?

A) 42 B) 35 C) 37
D) 48 E) 39

25. ¿De cuántas maneras podemos colocar cuatro cuadros en fila, de una colección de 9 cuadros?

A) 3024 B) 3042 C) 3124
D) 3050 E) 3100

26. Siete corredores, ¿de cuántas maneras diferentes pueden ocupar los tres primeros puestos?

A) 220 B) 190 C) 195
D) 210 E) 200

27. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar 5 personas en una fila?

A) 90 B) 100 C) 140
D) 130 E) 120

28. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ubicar 6 personas alrededor de una mesa circular?

A) 120 B) 100 C) 110
D) 140 E) 130

29. ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 8 personas (en forma simétrica) en torno a una mesa circular, si dos de ellas deben sentarse siempre juntas?

A) 1400 B) 1440 C) 1220
D) 1320 E) 1500

30. De un grupo de 15 hombres y 12 mujeres, ¿cuántos comités diferentes de 3 miembros hombres y 2 mujeres se puede formar?

A) 32 050 B) 30 405 C) 35 020
D) 30 030 E) 30 200

Claves

NIVEL 1		NIVEL 2	NIVEL 3
1. C	9. C	11. E	21. E
2. E	10. C	12. E	22. C
3. D		13. A	23. D
4. A		14. C	24. B
5. B		15. E	25. A
6. E		16. D	26. D
7. D		17. C	27. E
8. D		18. A	28. A
		19. C	29. B
		20. B	30. D

Probabilidades

El estudio de las probabilidades es una parte de las matemáticas en las que se utilizan algunos términos especiales.

Recuerda

Los subconjuntos del espacio muestral constituidos por un solo elemento (único resultado) se denominan **sucesos elementales**.



Experimento aleatorio (ε)

Llamaremos experimentos aleatorios a aquellos cuyos resultados no se pueden saber con exactitud antes de su realización.

Ejemplos:

- ε_1: lanzar una moneda.
- ε_2: lanzar un dado.

Espacio muestral (Ω)

Es el conjunto de todos los resultados posibles que tiene el experimento aleatorio.

Ejemplos:

- Del experimento de lanzar una moneda, su espacio muestral es:
  $\Omega = \{\text{Cara; Sello}\}$
- Del experimento de lanzar un dado, su espacio muestral es:
  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Suceso (A; B; C; ...)

Es cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo:

Del experimento de lanzar un dado, algunos sucesos son:

- A: obtener un número par.
  $A = \{2; 4; 6\}$
- B: obtener un número primo.
  $B = \{2; 3; 5\}$
- C: obtener un número impar menor que 5.
  $C = \{1; 3\}$

Atención

De un suceso determinado A, el suceso contrario es aquel que posee los puntos muestrales que no posee A, y se le denotará A' o A^c.

$$A^c = \Omega - A$$



Suceso imposible y sucesos seguro

Se llama suceso imposible a cualquier suceso que sea igual al conjunto vacío (∅), y por lo tanto, será un suceso que nunca ocurre.

Se llama suceso seguro a cualquier suceso que sea igual al espacio muestral (Ω), y por lo tanto, será un suceso que siempre ocurre.

Ejemplos:

- En el lanzamiento de una moneda, un suceso imposible es obtener cara y sello a la vez y un suceso seguro es obtener cara o sello.
- En el lanzamiento de un dado, un suceso imposible es obtener un número negativo y un suceso seguro es obtener un número menor que 7.

Sucesos mutuamente excluyentes

Decimos que dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes, si no pueden verificarse simultáneamente, es decir: $A \cap B = \varnothing$

Ejemplo:

De las personas atendidas en un banco en cierto periodo de tiempo, se tienen los siguientes sucesos:

A: se ha atendido menos de 20 personas.

B: se ha atendido exactamente 25 personas.

$A = \{1; 2; 3; ...; 19\} \quad \wedge \quad B = \{25\}$

$\Rightarrow \ A \cap B = \varnothing$

Sucesos independientes

Se dice que un suceso B es independiente de otro A cuando el suceso A no influye en B y viceversa.

Ejemplo:

Se lanzan simultáneamente una moneda y un dado anotándose el resultado obtenido. Se dan los siguientes sucesos:

A: obtener cara en la moneda.

B: obtener un número par en el dado.

Se observa que la ocurrencia de un suceso no influye en el otro.

Recuerda

Cuando dos sucesos no son independientes, se llaman sucesos dependientes.



DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

La probabilidad es un valor numérico que mide el grado de incertidumbre (duda) que se tiene al realizar un experimento aleatorio.

La probabilidad se calcula de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{Número de casos favorables del suceso A}}{\text{Número de casos totales del esperimento aleatorio}}$$

Ejemplo:

Se lanza un dado sobre el piso, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea par?

Resolución:

ε: lanzar un dado

Ω: $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

A: el resultado sea par

$A = \{2; 4; 6\} \Rightarrow n(A) = 3$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Importante

- Para dos sucesos cualesquiera A y B se tiene que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si A y B son dos sucesos mutuamente excluyentes se tiene: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si A y B son dos sucesos independientes se tiene: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$



Problemas resueltos

1 Si se lanza un dado sobre el piso, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea impar?

Resolución:

Del enunciado:

ε: lanzar un dado

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

A: el resultado sea impar

$A = \{1; 3; 5\} \Rightarrow n(A) = 3$

Luego:

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

2 En una caja se tienen 7 lapiceros rojos, 6 azules y 2 blancos; si se extrae uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea rojo?

Resolución:

Del enunciado:

ε: extraer un lapicero

R: el lapicero sea rojo $\Rightarrow n(R) = 7$

$n(\Omega) = 7 + 6 + 2 = 15$

Luego:

$P(R) = \dfrac{n(R)}{n(\Omega)} = \dfrac{7}{15}$

3 En una bolsa hay 30 fichas numeradas del 1 al 30. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una ficha, esta sea múltiplo de 5?

Resolución:

Del enunciado: $n(\Omega) = 30$

A: obtener una ficha múltiplo de 5.

$A = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$

$n(A) = 6$

Luego:

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{30}$

$\therefore P(A) = \dfrac{1}{5}$

4 ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras al lanzar dos monedas sobre una mesa?

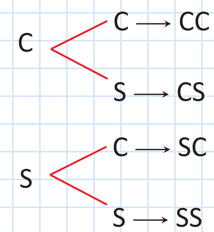
Resolución:

Determinamos los casos posibles haciendo un diagrama de árbol.

C: cara

S: sello

1.ª moneda — 2.ª moneda



5 Si se lanzan 2 dados al mismo tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea 8?

Resolución:

Construimos un cuadro de doble entrada con los 6 números:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Observando el cuadro de doble entrada nos damos cuenta que:

n.° de casos favorables = 5

n.° de casos totales = 36

$\Rightarrow P = \dfrac{5}{36}$

6 Si se lanzan 2 dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea 10 ó 12?

Resolución:

Aplicamos el mismo criterio anterior y podemos ver:
n.° de casos favorables (suma 10) = 3
n.° de casos favorables (suma 12) = 1

Luego:
número de casos posibles = 4

Por lo tanto:

$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

7 Se lanzan simultáneamente una moneda y un dado. Calcula la probabilidad de obtener una cara y un número par.

Resolución:

ε: lanzar una moneda y un dado juntos.

A: obtener cara y número par.

Donde:

$A = \{(C; 2), (C; 4), (C; 6)\} \Rightarrow N(A) = 3$

$\Omega = \{(C; 1), (C; 2), (C; 3), (C; 4), (C; 5), (C; 6), (S; 1),$
$(S; 2), (S; 3), (S; 4), (S; 5), (S; 6)\}$

$\Rightarrow n(\Omega) = 12$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

8 Al lanzar 3 monedas al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 caras y un sello?

Resolución:

ε: lanzar 3 monedas

$\Omega = \{CSS; CSC; CCS; CCC; SCC; SCS; SSC; SSS\}$

$\Rightarrow n(\Omega) = 8$

A: obtener 2 caras y un sello

$A = \{CSC; CCS; SCC\} \Rightarrow n(A) = 3$

$P(A) = \frac{3}{8}$

9 Se tienen en una bolsa 8 caramelos de limón y 4 de fresa. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 2 caramelos los 2 sean de fresa?

Resolución:

A: extraer 2 caramelos

$P(A) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$

$\frac{4}{12}$ ↓ 1.ª sea fresa; $\frac{3}{11}$ ↓ 2.ª sea fresa

10 Una persona entra a una bodega. La probabilidad de que compre Eder Cola es 0,6; Bachi Cola 0,5 y de que compre ambas bebidas es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Eder Cola o Bachi Cola?

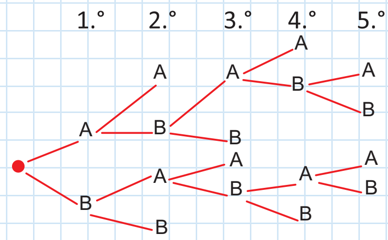
Resolución:

Sean los eventos:
A: la persona compra Eder Cola.
B: la persona compra Bachi Cola.

$P(A) = 0,6$	$P(A \cup B) =$
$P(B) = 0,5$	$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = 0,3$	$P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - 0,3$
$P(A \cup B) = ?$	$P(A \cup B) = 0,8$

10 Los equipos A y B juegan en un torneo de baloncesto. El primer equipo que gane dos juegos seguidos o un total de cuatro juego, gana el torneo. Halla el número de puntos muestrales que tiene el espacio muestral asociado al evento.

Resolución:



Podemos notar que el recorrido desde el principio del árbol a los puntos finales indica quién ganó cada juego en el torneo individual.

(AA, ABAA, ABABA, ABABB, ABB, BAA, BABAA, BABAB, BABB, BB)

$\therefore$ Cantidad de puntos muestrales es: 10

Actividades de razonamiento

1. Se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número impar?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

2. Se lanza una moneda, ¿qué probabilidad hay de obtener cara?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{2}$

3. Se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 2?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

4. Se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número múltiplo de 3?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

5. Al lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener números iguales?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

6. Si se lanzan dos monedas juntas, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea dos caras o dos sellos?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

7. De una baraja de 52 naipes se extrae uno, ¿cuál es la probabilidad de que sea de corazones?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{16}$ C) $\frac{3}{16}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{7}{16}$

8. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado resulte un múltiplo de tres?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{5}{6}$

9. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número, tal que al alevarlo al cuadarado, resulte un número impar?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

10. Al lanzar 4 monedas al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 caras y un sello?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{16}$ C) $\frac{3}{16}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{7}{16}$

11. Una urna contiene 7 bolas negras, 4 bolas azules y 2 bolas rojas. Si se extrae al azar una de ellas, halla la probabilidad de que la bola extraída sea azul.

A) $\frac{7}{13}$ B) $\frac{3}{13}$ C) $\frac{11}{13}$ D) $\frac{4}{13}$ E) $\frac{2}{13}$

12. Una moneda se lanza cinco veces. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

A) 64 B) 32 C) 8 D) 16 E) 5

13. En una urna hay 8 fichas negras y 10 fichas azules. Si se extrae una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea de color azul?

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{7}{9}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{5}{18}$ E) $\frac{7}{18}$

14. Al lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 6 ó 7?

A) $\frac{5}{36}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{18}$ E) $\frac{11}{36}$

Claves

1. C	5. B	9. B	13. C
2. E	6. A	10. D	14. E
3. C	7. D	11. D	
4. A	8. C	12. B	

Reto



Se lanza una moneda y un dado. Calcula la probabilidad de obtener cara en la moneda y un número mayor que 4 en el dado.

Rpta.: $\frac{1}{6}$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Al arrojar 3 monedas al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 sellos y una cara?

   A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

2. Una caja contiene 10 bolas rojas, 4 bolas blancas y 6 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola, esta sea roja?

   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

3. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado resulte 2?

   A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{6}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{11}{12}$

4. Al lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos menor que 5?

   A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{2}{17}$

5. Al arrojar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea 8?

   A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{5}{36}$ C) $\frac{7}{36}$ D) $\frac{11}{36}$ E) $\frac{1}{4}$

6. Se ejecutan tres lanzamientos consecutivos de una misma moneda. Determina la probabilidad de obtener sello, cara y sello, en ese orden.

   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{2}{5}$

7. De una baraja de 52 naipes se extrae uno. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de espadas?

   A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{17}$ C) $\frac{7}{36}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{51}$

8. Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 bolas azules y 2 negras. Si se extrae al azar una de ellas, halla la probabilidad de que la bola extraída no sea azul.

   A) $\frac{2}{13}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{5}{8}$

9. En una fiesta se encuentran 40 hombres y 60 mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona en retirarse de la fiesta sea un varón?

   A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

10. Se lanza un dado. Si el número es impar, ¿cuál es la probabilidad de que sea primo?

    A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

NIVEL 2

11. En un aula hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, 5 alumnos rubios y 10 morenos. Si se selecciona una persona al azar, encuentra la probabilidad de que sea hombre.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

12. Del problema 11, encuentra la probabilidad de que la persona seleccionada sea mujer morena.

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{9}$

13. Del problema 11, encuentra la probabilidad de que la persona seleccionada sea hombre o mujer.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{5}$

14. Se lanzan dos dados al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea múltiplo de 5?

A) $\frac{12}{36}$ B) $\frac{11}{36}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{21}{36}$ E) $\frac{2}{9}$

15. En una ánfora se tienen 12 bolas negras, 20 rojas y 18 marrones. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola, esta no sea roja?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

16. Para un sorteo se ha impreso 520 boletos, de los cuales 96 tienen premio. ¿Cuál es la probabilidad de comprar un boleto y no obtener premio alguno?

A) $\frac{53}{65}$ B) $\frac{12}{65}$ C) $\frac{13}{53}$ D) $\frac{53}{96}$ E) $\frac{12}{53}$

17. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado resulte 2 ó 3?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{36}$ E) $\frac{1}{4}$

18. Al arrojar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8 ó 9?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{85}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{18}$ E) $\frac{1}{9}$

19. Si se tiran tres monedas juntas, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado sea tres caras o tres sellos?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{8}$

NIVEL 3

20. Una moneda se lanza tres veces. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

21. Miguel lanza tres monedas, una por una sobre una mesa. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan 3 sellos?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{8}$

22. Del problema 21, ¿cuál es la probabilidad de que salgan al menos 2 sellos?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

23. Al arrojar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea cuatro o seis?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{12}$

24. En una prisión se tiene que en el pabellón A1, la probabilidad de que una pregunta dada se conteste con la verdad es 2/7, y en el pabellón C3 esta probabilidad es 3/10. ¿Cuál es la probabilidad de que al hacer una pregunta a los presos de estos pabellones se obtenga como respuesta una mentira?

A) $\frac{6}{70}$ B) $\frac{32}{35}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{6}{7}$

25. En una bolsa se tienen 8 caramelos de fresa y 3 de limón. Si se extraen al azar 2 caramelos, ¿cuál es la probabilidad de que salgan 2 caramelos de fresa?

A) $\frac{31}{45}$ B) $\frac{12}{45}$ C) $\frac{28}{55}$ D) $\frac{29}{45}$ E) $\frac{17}{45}$

26. De un total de 52 cartas se extraen dos a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que dichas cartas sean de corazones?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{17}$ C) $\frac{7}{36}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{7}{51}$

27. Se lanza un par de dados. Si los números que resultan son diferentes, halla la probabilidad de que su suma sea impar.

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{8}$

28. En una caja se tienen 8 bolas rojas, 7 bolas blancas y 10 bolas amarillas. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos bolas, la primera sea roja y la segunda sea amarilla?

A) $\frac{16}{125}$ B) $\frac{3}{25}$ C) $\frac{2}{25}$ D) $\frac{2}{15}$ E) $\frac{3}{125}$

Claves

NIVEL 1
1. C
2. A
3. D
4. D
5. B
6. C
7. A
8. D
9. A
10. D

NIVEL 2
11. B
12. E
13. C
14. B
15. C
16. A
17. C
18. A
19. C

NIVEL 3
20. D
21. D
22. E
23. B
24. B
25. C
26. B
27. B
28. D

Teoría de conjuntos

IDEA DE CONJUNTO

Un conjunto es una colección, agrupación o reunión de objetos que están correctamente definidos según su naturaleza.

Ejemplos:

- Conjunto de las vocales.
- Conjunto de los números pares menores que 15.
- Conjunto de los días de la semana.

Notación:
Los conjuntos se denotan por medio de letras mayúsculas y los objetos que la conforman, denominados elementos, se representan separados por punto y coma y entre llaves.

Ejemplos:

- $A = \{a; e; i; o; u\}$
- $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$
- C = {lunes; martes; miércoles; jueves; viernes; sábado; domingo}

Importante

Los elementos que conforman a un conjunto, deben ser bien diferenciados según su naturaleza.



RELACIÓN DE PERTENENCIA

Si un elemento forma parte de un conjunto, se dice que pertenece ($\in$) a dicho conjunto de lo contrario, se dice que no pertenece ($\notin$) a dicho conjunto.

Ejemplos:

$A = \{a; e; i; o; u\}$

- $a \in A$
- $b \notin A$
- $u \in A$
- $d \notin A$

$B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$

- $6 \in B$
- $5 \notin B$
- $10 \in B$
- $9 \notin B$

Atención

Para representar el número de elementos de un conjunto A, se emplea el símbolo n(A), al que también se le denomina cardinal del conjunto A.
Ejemplo:
Sea:
$A = \{a; e; i; o; u\}$
$\Rightarrow n(A) = 5$
$B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$
$\Rightarrow n(B) = 7$



RELACIÓN DE INCLUSIÓN

Si todos los elementos que pertenecen a un conjunto también pertenecen a otro conjunto, se dice que dicho conjunto está incluido ($\subset$) en el otro, y sino, se dice que no está incluido ($\not\subset$).

Ejemplo:
Sean los conjuntos:

$A = \{a, e; i; o; u\}$
$B = \{a; e; o\}$
$C = \{i; u\}$
$D = \{a; e; o; u\}$
$E = \{a; b; c; d; e\}$

- $B \subset A$
- $D \subset A$
- $C \subset A$
- $E \not\subset A$

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Determinar un conjunto significa indicar cuáles son sus elementos. Existen dos formas de indicar los elementos:

Observación

Cuando se determina un conjunto por comprensión, se debe hacer uso del siguiente símbolo para establecer la característica de sus elementos:

{x / x es un o una...}
Se lee: x tal que x es un o una...



A) Por extensión

Un conjunto se determina por extensión cuando se indica uno a uno sus elementos.

Ejemplos:

A = {a; e; i; o; u}

B = {2; 4; 6; 8, 10; 12; 14}

C = {lunes; martes; miércoles; jueves; viernes; sábado; domingo}

B) Por comprensión

Un conjunto se determina por comprensión cuando se indica una característica o propiedad común a todos los elementos.

Ejemplos:

A = {x / x es una vocal}

B = {x / x es un número par positivo menor que 15}

C = {x / x es un día de la semana}

CONJUNTOS ESPECIALES

Conjunto vacío o nulo

Se llama así al conjunto que no posee elementos y se le denota: $\varnothing$ o { }

Ejemplo:

$A = \{x / x \in \mathbb{N}; 5 < x < 6\}$

Conjunto unitario

Se llama así al conjunto que posee un solo elemento.

Ejemplo:

$B = \{x / x \in \mathbb{N}; 8 < x < 10\}$

Conjunto finito

Se llama así al conjunto que posee una cantidad determinada de elementos.

Ejemplo:

C = {x / x es una letra del abecedario}

Conjunto infinito

Se llama así al conjunto que posee una cantidad ilimitada de elementos.

Ejemplo:

D = {x / x es una estrella del firmamento}

Conjunto universal

Se llama así al conjunto que sirve de referencia, para el estudio de otros conjuntos incluidos en él.

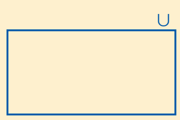
Ejemplo:

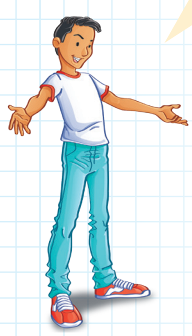
Sean los conjuntos: A = {x / x es un número par}
B = {x / x es un número impar}

El conjunto universal será: los números enteros.

Importante

El conjunto universal (U) se representa mediante diagramas de Venn-Euler, en forma de rectángulos.





Operaciones entre conjuntos

Unión (A ∪ B)

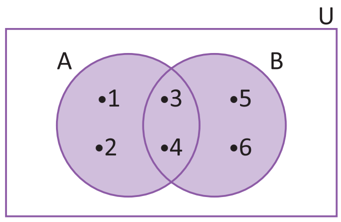
Dados dos conjuntos A y B, la unión de los mismos es otro conjunto, cuyos elementos pertenecen al conjunto A o al conujnto B.

Ejemplo:
Dados los conjuntos:

A = {1; 2; 3; 4}

B = {3; 4; 5; 6}

A ∪ B = {1; 2; 3; 4; 5; 6}



Intersección (A ∩ B)

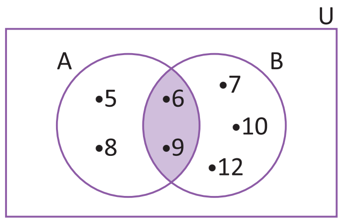
Dados dos conjuntos A y B, la intersección de los mismos es otro conjunto cuyos elementos son comunes al conujnto A y al conujnto B.

Ejemplo:
Dados los conjuntos:

A = {5; 6; 8; 9}

B = {6; 7; 9; 10; 12}

A ∩ B = {6; 9}



Diferencia (A – B)

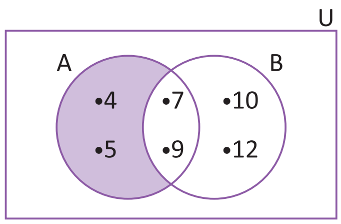
Dados dos conjuntos A y B, la diferencia entre los mismos está determinada por los elementos que pertenecen al conjunto A, pero no al conjunto B.

Ejemplo:
Dados los conjuntos:

A = {4; 5; 7; 9}

B = {7; 9; 10; 12}

A – B = {4; 5}



Diferencia simétrica (A ∆ B)

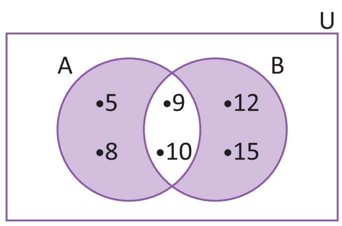
Dados dos conjuntos A y B, la diferencia simétrica entre los mismos está determinada por los elementos que pertenecen a la unión, pero no a la intersección.

Ejemplo:
Dados los conjuntos:

A = {5; 8; 9; 10}

B = {9; 10; 12; 15}

A ∆ B = {5; 8; 12; 15}



Complemento (A' o A^C)

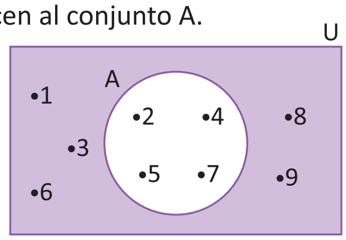
Dado el conjunto A, el complemento de A está determinado por los elementos que pertenecen al conjunto universal, pero no pertenecen al conjunto A.

Ejemplo:
Dados los conjuntos:

U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

A = {2; 4; 5; 7}

A' = {1; 3; 6; 8; 9}



Nota

Propiedades

A ∪ A = A
A ∪ ∅ = A
A ∪ U = U
A ∩ A = A
A ∩ ∅ = ∅
A ∩ U = A

Además:

A – A = ∅
A – ∅ = A
A ∆ A = ∅
A ∆ ∅ = A
(A')' = A
∅' = U
U' = ∅

Atención

Conjunto potencia

Sea A un conjunto, el conjunto potencia de A denotado por P(A), es aquel que está formado por todos los subconjuntos de A.

Ejemplo:

Sea A = {a; b}, luego:
P(A) = {∅; {a}; {b}; {a; b}}

Además:
$n[P(A)] = 2^{n(A)}$

Para el ejemplo:
$n[P(A)] = 2^2 = 4$



Problemas resueltos

1 Halla la suma de los elementos del conjunto:
$A = \{x + 4 / x \in \mathbb{Z}, 5 < x < 10\}$

Resolución:

Como: $5 < x < 10 \Rightarrow x \in \{6; 7; 8; 9\}$
Luego: $x = 6 \Rightarrow 6 + 4 = 10$
$x = 7 \Rightarrow 7 + 4 = 11$
$x = 8 \Rightarrow 8 + 4 = 12$
$x = 9 \Rightarrow 9 + 4 = 13$
$A = \{10; 11; 12; 13\}$
$\therefore$ Suma de elementos: $10 + 11 + 12 + 13 = 46$

2 Determina por extensión el siguiente conjunto:
$B = \{x^2 + 1 / x \in \mathbb{Z} \wedge 4 \leq x < 9\}$

Resolución:

Como: $4 \leq x < 9 \Rightarrow x \in \{4; 5; 6; 7; 8\}$
Luego: $x = 4 \Rightarrow 4^2 + 1 = 17$
$x = 5 \Rightarrow 5^2 + 1 = 26$
$x = 6 \Rightarrow 6^2 + 1 = 37$
$x = 7 \Rightarrow 7^2 + 1 = 50$
$x = 8 \Rightarrow 8^2 + 1 = 65$
$\therefore B = \{17; 26; 37; 50; 65\}$

3 Halla el valor de $(m + n)$ si el conjunto
$A = \{2n + 1; 13; m - n\}$ es unitario.

Resolución:

Dado que A es unitario se cumple:
$2n + 1 = 13$
$2n = 12 \Rightarrow n = 6$
También: $m - n = 13$
$m - 6 = 13 \Rightarrow m = 19$
$\therefore m + n = 19 + 6 = 25$

4 Sean los conjuntos iguales A y B:
$A = \{x + 7; 6\}$; $B = \{y + 2; 12\}$
Da como respuesta: $x . y$

Resolución:

Como A y B son conjuntos iguales, se cumple:
$x + 7 = 12$ e $y + 2 = 6$
$x = 5$ $y = 4$
$\therefore xy = 5 . 4 = 20$

5 Si los conjuntos A y B son unitarios, halla: $a^2 + b^2$
$A = \{a + b; 12\}$; $B = \{4; a - b\}$

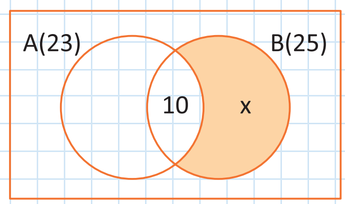
Resolución:

Por ser unitarios se cumple:
$a + b = 12$ ... (I)
$a - b = 4$ ... (II)
Sumando (I) y (II) se tiene:
$2a = 16 \Rightarrow a = 8 \wedge b = 4$
$\therefore a^2 + b^2 = 8^2 + 4^2 = 80$

6 Si: $n(A) = 23$; $n(B) = 25$ y $n(A \cap B) = 10$; halla: $n(B - A)$

Resolución:

Gráficamente:

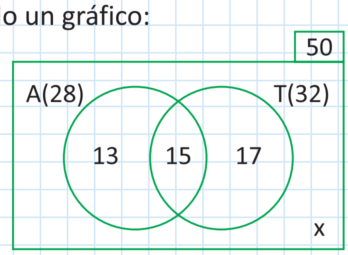


Del gráfico: $x + 10 = 25$
$x = 15$
$\therefore n(B - A) = 15$

7 De un grupo de 50 personas 28 conocen Arequipa, 32 conocen Trujillo y 15 ambas ciudades. ¿Cuántos no conocen ninguna de estas ciudades?

Resolución:

Haciendo un gráfico:

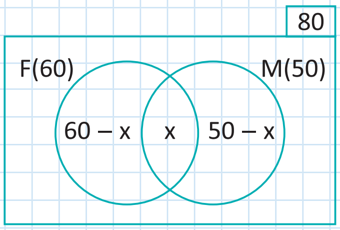


Del gráfico:
$13 + 15 + 17 + x = 50$
$45 + x = 50$
$x = 5$
$\therefore$ 5 personas no conocen ninguna de estas ciudades.

8 En un salón de clases de 80 alumnos, 60 aprueban Física y 50 Matemática, ¿cuántos alumnos aprueban los dos cursos?

Resolución:

Gráficamente:



Del gráfico:

$60 - x + x + 50 - x = 80$

$110 - x = 80$

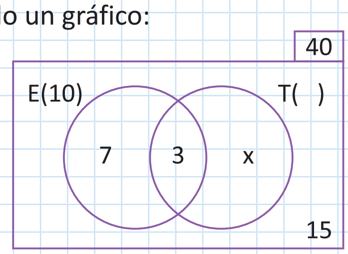
$x = 30$

$\therefore$ 30 alumnos aprueban los dos cursos.

9 De un grupo de 40 personas se sabe que 15 no estudian ni trabajan, 10 estudian, 3 estudian y trabajan. ¿Cuántos realizan solo una de las dos actividades?

Resolución:

Haciendo un gráfico:



Del gráfico:

$7 + 3 + x + 15 = 40$

$25 + x = 40$

$x = 15$

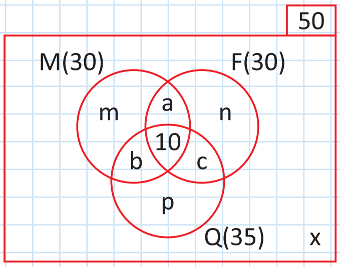
$\therefore$ Realizan solo una actividad:

$x + 7 = 15 + 7 = 22$

10 En un salón de clases de 50 alumnos, 30 aprueban Matemática, 30 Física y 35 Química, 18 Matemática y Física, 19 Física y Química; 20 Matemática y Química, y 10 aprueban los tres cursos. ¿Cuántos no aprueban ninguno de los tres cursos?

Resolución:

Gráficamente:



Del gráfico y de los datos:

$a + 10 = 18 \Rightarrow a = 8$

$c + 10 = 19 \Rightarrow c = 9$

$b + 10 = 20 \Rightarrow b = 10$

También:

- $a + b + m + 10 = 30$

  $8 + 10 + m + 10 = 30$

  $m + 28 = 30 \Rightarrow m = 2$

- $a + c + n + 10 = 30$

  $8 + 9 + n + 10 = 30$

  $n + 27 = 30 \Rightarrow n = 3$

- $b + c + p + 10 = 35$

  $10 + 9 + p + 10 = 35$

  $p + 29 = 35 \Rightarrow p = 6$

Además:

$a + b + c + m + n + p + 10 + x = 50$

$8 + 10 + 9 + 2 + 3 + 6 + 10 + x = 50$

$48 + x = 50$

$x = 2$

$\therefore$ 2 personas no aprueban ninguno de los tres cursos.

9 El conjunto potencia del conjunto B tiene 64 elementos.
Calcula el número de elementos del conjunto B.

Resolución:

Del enunciado:

$n[P(B)] = 64$

$2^{n(B)} = 64 = 2^6$

$2^{n(B)} = 2^6$

$\Rightarrow n(B) = 6$

$\therefore$ El conjunto B tiene 6 elementos.

Actividades de razonamiento

1. Expresa por extensión el siguiente conjunto:
$A = \{3x - 2 / x \in \mathbb{N} \wedge 2 < x \leq 5\}$

A) {7; 10} B) {10; 13; 15} C) {7; 10; 13}
D) {5; 7; 10} E) {3; 4; 5}

2. Halla la suma de los elementos del siguiente conjunto:
$C = \{x^2 + 1 / x \in \mathbb{Z}, 3 < x < 8\}$

A) 148 B) 129 C) 130 D) 81 E) 152

3. Si el siguiente conjunto es unitario:
$H = \{a + 15; b^2 - 4; 45\}$
Calcula: $a + b$

A) 33 B) 24 C) 25 D) 50 E) 37

4. Si los conjuntos $A = \{a^3 + 1; 10\}$ y $B = \{a + b; 65\}$ son iguales, calcula el valor de: $a - b$

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

5. Dado el conjunto unitario: $A = \{a + b; a + 2b - 3; 12\}$
Calcula $a^2 + b^2$.

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

6. Si: $n(A) = 29$; $n(B) = 43$; $n(A \cap B) = 15$; $n[(A \cup B)^c] = 8$,
Halla: $n(U)$

A) 60 B) 65 C) 80 D) 75 E) 90

7. Si los conjuntos A y B son unitarios e iguales:
$A = \{a + 3; 3b + 1\}$; $B = \{6c + 1; 8c - 1\}$
Calcula: $a + b + c$

A) 6 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

8. Si: $n(U) = 60$; $n(A) = 25$; $n(B) = 36$; $n(A \cap B) = 7$
Halla: $n(A \cup B)'$

A) 8 B) 10 C) 6 D) 5 E) 4

9. En un aula de 60 alumnos, 7 no aprueban ni Aritmética ni Geometría, y 35 aprueban solo Aritmética. ¿Cuántos aprobaron solo Geometría, si los que aprobaron ambos cursos son 10?

A) 8 B)6 C) 5 D) 10 E) 12

10. De los 31 días del mes de agosto, Jonathan, 18 días salió a correr y 20 a nadar, ¿cuántos días decidió correr y nadar, si en ese mes realizó por lo menos una de las dos actividades?

A) 6 B) 7 C) 9 D) 5 E) 8

11. De un total de 29 personas se sabe:
– 15 gustan del teatro.
– 19 gustan del cine.
– 8 gustan del cine y del teatro.
I. ¿Cuántos gustan solo del cine?
II. ¿Cuántos gustan solo del teatro?
III. ¿Cuántos no gustan del cine ni del teatro?

A) 11; 7 y 3 B) 7; 3 y 11 C) 3; 7 y 11
D) 7; 11 y 3 E) 2; 7 y 11

12. De un total de 40 personas se sabe:
– 21 comen carne.
– 30 comen verduras.
– 13 comen carne y verduras.
I. ¿Cuántos comen solo verduras?
II. ¿Cuántos no comen carne ni verduras?
III. ¿Cuántos no comen verduras?

A) 17; 2 y 10 B) 6; 9 y 15 C) 8; 15 y 18
D) 5; 6 y 24 E) 15; 2 y 16

13. De 129 personas que consumen pollo a la brasa, 70 consumen mayonesa, 62 ketchup y 80 mostaza. Además, 35 consumen mayonesa y ketchup; 38 ketchup y mostaza; 30 mayonesa y mostaza. Si 20 comen las 3 salsas. ¿Cuántos consumen solo una de las 3 salsas?

A) 66 B) 55 C) 60 D) 65 E) 70

14. De 55 señoritas que estudian secretariado bilingüe, 25 hablan inglés, 32 francés, 33 alemán y 5 los tres idiomas.
¿Cuántas señoritas hablan 2 de estos idiomas?

A) 22 B) 27 C) 21 D) 25 E) 28

Claves

1. C 2. C 3. E 4. A 5. D 6. B 7. B 8. C 9. A 10. B 11. A 12. A 13. A 14. D

Reto



Si:
$n[P(A)] = 128$
$n[P(B)] = 64$
$n[P(A \cup B)] = 1024$
Calcula: $n[P(A \cap B)]$

Rpta: 3

Refuerza practicando

NIVEL 1

Expresa por extensión los siguientes conjuntos:

1. $A = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge 4 \leq x < 8\}$

A) {4; 5; 6} B) {5; 6; 7} C) {5; 6; 7, 8}
D) {4; 5; 6; 7; 8} E) {4; 5; 6; 7}

2. $B = \{x / x \in \mathbb{Z} \wedge -2 < x < 3\}$

A) {–1; 0, 1; 2; 3} B) {–1; 0; 1; 2; 4} C) {–1; 0; 1; 2}
D) {–2; –1; 0; 1} E) {–2; –1; 0; 1; 2}

3. $C = \{2x / x \in \mathbb{N} \wedge x < 4\}$

A) {0; 2; 4} B) {0; 1; 2; 3; 4} C) {2; 4; 8}
D) {0; 2; 4; 6} E) {0; 1; 3}

4. $D = \{x + 1 / x \in \mathbb{Z} \wedge -3 < x \leq 1\}$

A) {–2; –1; 0} B) {–3; –2; –1; 0} C) {–1; 0, 1}
D) {–2; –1; 0; 1} E) {–1; 0; 1; 2}

Expresa por comprensión los siguientes conjuntos:

5. E = {1; 2; 3; 4}

A) $\{2x / x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 4\}$ B) $\{x / x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 5\}$
C) $\{x / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$ D) $\{x / x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 4\}$
E) $\{x / x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x \leq 4\}$

6. F = {–2; –1; 0}

A) $\{x+1/x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x \leq 0\}$ B) $\{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -3 < x \leq 0\}$
C) $\{x / x \in \mathbb{N} \wedge x < 2\}$ D) $\{2x/x \in \mathbb{Z} \wedge -3 < x < 2\}$
E) $\{x / x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x \leq 1\}$

7. G = {2; 4; 6}

A) $\{x / x \in \mathbb{N} \wedge 2 < x < 7\}$ B) $\{x / x \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq x \leq 6\}$
C) $\{x / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 6\}$ D) $\{x+1/x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 5\}$
E) $\{2x / x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 3\}$

Dados los conjuntos A y B incluidos en el universo U, determina las siguientes operaciones con dichos conjuntos:

A = {4; 5; 7; 8} B = {5; 8; 9} U = {3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

8. Halla: $A \cup B$

A) {4; 5; 7; 8} B) {5; 7} C) {7; 8; 9}
D) {4; 5; 7; 8; 9} E) {4; 5}

9. Halla: $A \cap B$

A) {5; 8} B) {5; 7; 8} C) {8; 9} D) {5; 6; 7} E) {7; 8}

10. Halla: A – B

A) {3; 4} B) {4; 7} C) {5; 6}
D) {7; 8} E) {3; 5; 7}

NIVEL 2

11. Halla: B – A

A) {8} B) {7; 8} C) {8; 9} D) {5; 6; 7} E) {9}

12. Halla: $A \Delta B$

A) {5; 6; 7} B) {4; 6; 7} C) {4; 7; 9}
D) {2; 3; 5} E) {3; 4; 6}

13) Halla: A^c

A) {8; 9} B) {3; 6; 9} C) {5; 6; 8}
D) {7; 8; 9} E) {6; 9}

14) Halla: B^c

A) {6; 7} B) {3; 4; 7} C) {3; 4}
D) {3; 4; 6; 7} E) {3; 6}

15) Halla: $(A \cup B)^c$

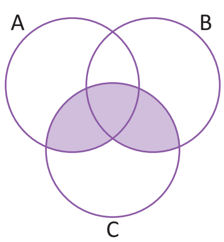
A) {3; 6} B) {4; 5} C) {6}
D) {3; 6; 7} E) {7; 9}

16) Halla: $(A \cap B)^c$

A) {7; 9} B) {3; 4; 6; 9} C) {2; 4; 6}
D) {4; 7; 9} E) {3; 4; 6; 7; 9}

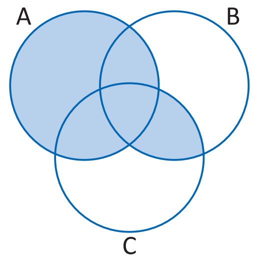
Halla la alternativa cuya operación entre conjuntos representa el área de la región sombreada.

17)



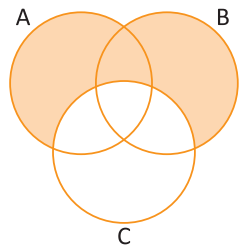
A) $A \cap B \cap C$
B) $(A \cap C) \cup B$
C) $(A \cup B) \cap C$
D) $A \cup B \cup C$
E) $A \,\Delta\, C$

18)



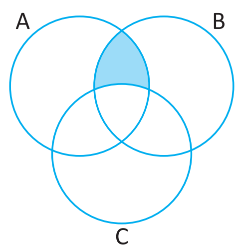
A) $(A - B) \cup (B - C)$
B) $A - (B \cap C)$
C) $A \,\Delta\, B$
D) $A \cup (B \cap C)$
E) $A \cap (B \cup C)$

19)



A) $(A \cup B) - C$
B) $A \,\Delta\, B$
C) $(A - C) \cup B$
D) $(B \cap C) \cup A$
E) $(A \cup C) \cap B$

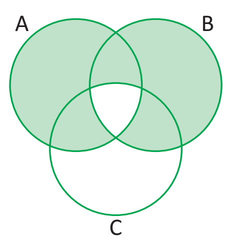
20)



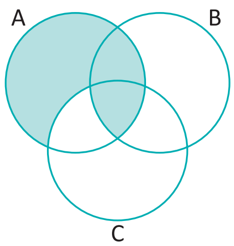
A) $(A \cup B) \cup C$
B) $(A \cup C) \cap B$
C) $(A \cup B) \cap C$
D) $(A \,\Delta\, B) \cap C$
E) $(A \cap B) - C$

NIVEL 3

21)

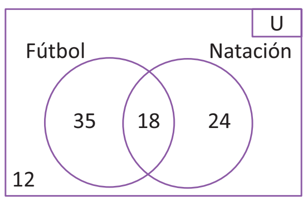


A) $(A \,\Delta\, B) \cup C$
B) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
C) $(A \cup B) \cap C$
D) $(A \,\Delta\, C) \cap C$
E) $(A \,\Delta\, B) \cup (B - C)$

22. 

A) $(A \,\Delta\, B) \cup C$
B) $(A \cup B) - C$
C) $(A \cup C) - B$
D) $(A \cup B) \cup (A - C)$
E) $(A \cap B) \cup (A - C)$

El siguiente diagrama de Venn representa los alumnos matriculados en una academia deportiva. De acuerdo a esta información responda:



23. ¿Cuántos alumnos están inscritos en fútbol?

A) 53 B) 46 C) 50 D) 56 E) 58

24. ¿Cuántos alumnos están inscritos en natación?

A) 34 B) 48 C) 42 D) 40 E) 46

25. ¿Cuántos alumnos están inscritos en fútbol o natación?

A) 73 B) 70 C) 80 D) 85 E) 77

26. ¿Cuántos alumnos están inscritos en fútbol y natación?

A) 25 B) 18 C) 20 D) 15 E) 22

27. ¿Cuántos alumnos tiene la academia?

A) 85 B) 70 C) 92 D) 89 E) 81

28. ¿Cuántos están inscritos solo en natación?

A) 24 B) 18 C) 26 D) 20 E) 14

29. ¿Cuántos alumnos no están inscritos en fútbol ni en natación?

A) 6 B) 14 C) 12 D) 7 E) 10

30. Sean: $A = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge x < 10 / x = \overset{\circ}{3}\}$

$B = \{2x / x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 4\}$

Halla: $n(A \,\Delta\, B)$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 6 E) 7

Claves

NIVEL 1	9. A	17. C	25. E
1. E	10. B	18. D	26. B
2. C	**NIVEL 2**	19. A	27. D
3. D	11. E	20. E	28. A
4. E	12. C	**NIVEL 3**	29. C
5. D	13. B	21. E	30. D
6. B	14. D	22. E	
7. E	15. A	23. A	
8. D	16. E	24. C	

Psicotécnico

DEFINICIÓN

Es un test psicométrico que nos permite medir nuestras habilidades matemáticas numéricas, razonamiento verbal, memoria visual, etc.

Veamos algunas aplicaciones:

1. Halla los números que siguen:

2	5	8	11	?
3	6	12	24	?

Notamos que la fila superior aumenta de 3 en 3 y la fila inferior se duplica.

$\therefore$ Los números que siguen son 14 y 48.

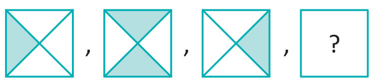
2. Halla la letra que sigue:

(S), (A), (N), (M), (A), (R), (C), (O), (?)

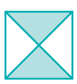
Notamos que las letras son parte del nombre "SAN MARCOS".

$\therefore$ La letra que sigue es "S".

3. Halla el cuadrado que sigue:



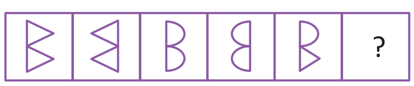
Observamos que las dos sombras están superpuestas en la 1.ª figura, luego giran, una en sentido horario y la otra en sentido antihorario, obteniéndose la 2.ª figura, para después juntarse nuevamente en la 3.ª figura.

$\therefore$ La siguiente figura es: 

Debemos tener en cuenta que los test también abarcan las figuras, las cuales nos permiten desarrollar nuestras capacidades de análisis.

Ejemplo:

Halla la figura que sigue:



1.° 2.° 3.° 4.° 5.° 6.°

– Le asignamos un orden a cada cuadro.
– Notamos que los cuadros pares son el reflejo de los impares.
– La figura que siguen es: 

Sabías que...

Este tipo de ejercicios estimula la mente y aumenta nuestro coeficiente intelectual.



Atención

Los ejercicios mostrados siempre mantienen una lógica en común.



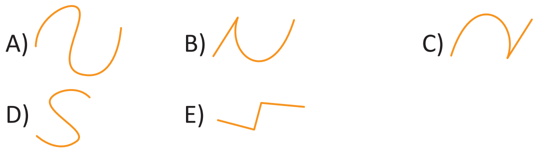
Recuerda

Todos tenemos las capacidades, pero debemos aprender a desarrollarlas, para eso es importante la práctica.

Problemas resueltos

1 ¿Qué figura continúa?





Resolución:

Todas las figuras del problema tienen líneas rectas quebradas, de las alternativas solo la figura E tiene rectas quebradas, las demás tienen líneas curvas.

Rpta.: E

2 Halla el número y la letra que sigue.

1	C	5	J	?
A	3	F	7	?

A) 11 - P B) 9 - P C) 10 - Ñ D) 9 - Ñ E) 11 - Ñ

Resolución:

Los números aumentan de 2 en 2: 1; 3; 5; 7; 9

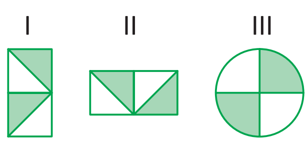
Las letras varían en:

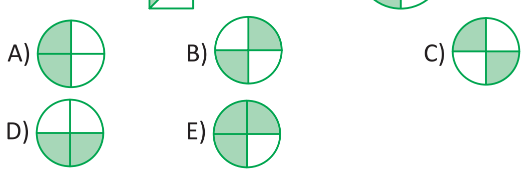
A $\underbrace{B}_{1\ \text{letra}}$ C $\underbrace{DE}_{2\ \text{letras}}$ F $\underbrace{GHI}_{3\ \text{letras}}$ J $\underbrace{KLMN}_{4\ \text{letras}}$ Ñ

Entonces: 9 - Ñ

Luego, la respuesta es la D.

3 Completa la siguiente analogía:



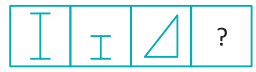


Resolución:

La primera figura gira 90° en sentido horario y aparece en la segunda figura. Al girar las regiones sombreadas de la tercera figura, obtenemos: la figura C.

Rpta.: C

4 Halla la figura que sigue.

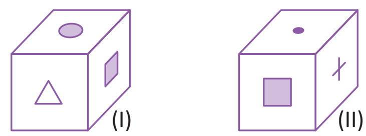




Resolución:

Se observa en la primera dupla una figura grande y otra pequeña. Entonces la siguiente dupla debe cumplir la misma condición. Por lo tanto, la figura que continúa es un triángulo pequeño. Entonces, la clave es la E.

5 Se muestra dos posiciones de un mismo cubo.



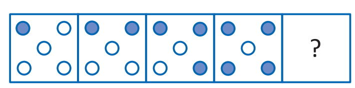
¿Cuál es la figura que se opone al círculo?

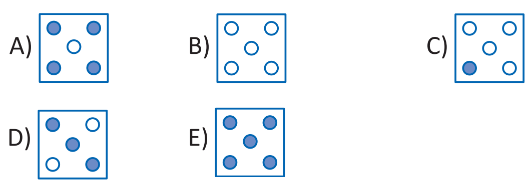
A) El cuadrado. B) El triángulo. C) El punto.
D) La cruz. E) La figura no mostrada en el cubo.

Resolución:

Si en la figura (I) tomamos como base el triángulo y movemos el cuadrado de tal forma que escondemos el círculo y tengamos al frente al cuadrado (II). Notamos que la figura que se opone al círculo es la cruz (+).

6 ¿Qué figura continúa?



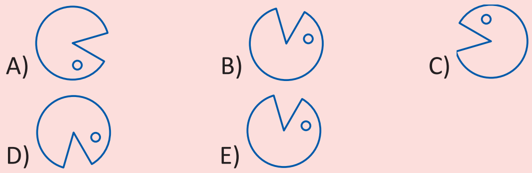


Resolución:

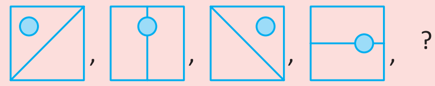
El número de círculos sombreados va aumentando de 1 en 1 siguiendo un sentido horario. Entonces, la clave es la E.

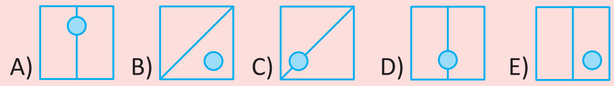
Actividades de razonamiento

1. ¿Qué figura no guarda relación con las demás?

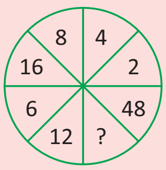


2. ¿Qué figura continúa?



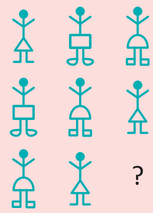


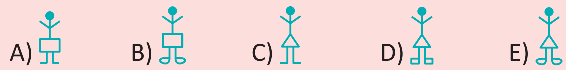
3. ¿Indica qué número falta?



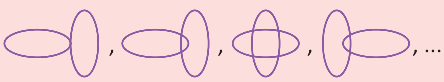
A) 36 B) 24 C) 14 D) 18 E) 40

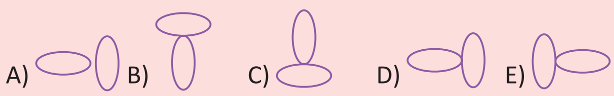
4. ¿Cuál de las alternativas completa el grupo de figuras?



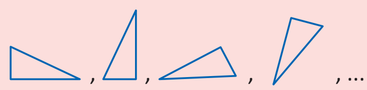


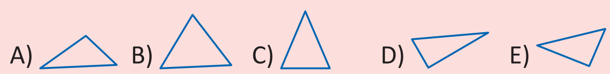
5. ¿Qué figura continúa?



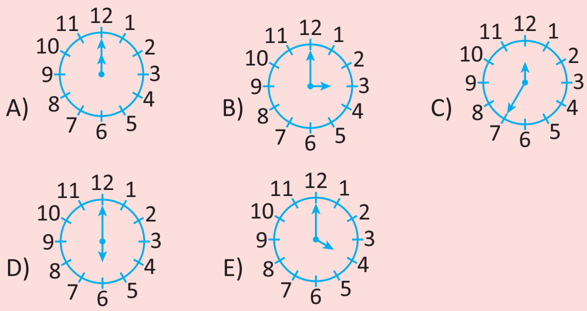


6. ¿Qué figura continúa?

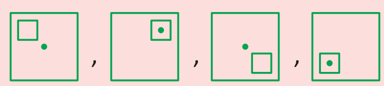


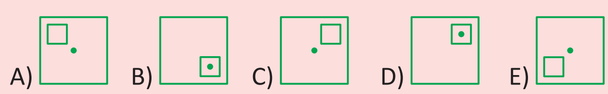


7. ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



8. ¿Qué figura continúa?

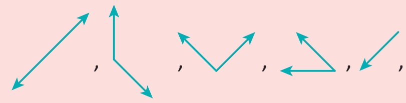


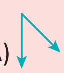
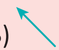
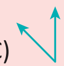
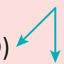
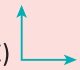


9. ¿Cuál es el día que sigue al anterior día del jueves?

A) Lunes B) Miércoles C) Jueves
D) Martes E) Viernes

10. Indica la figura que sigue:

 , ...

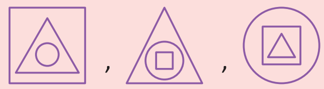
A)  B)  C)  D)  E) 

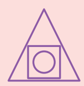
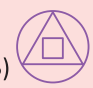
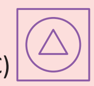
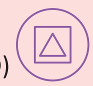
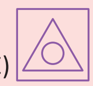
11. ¿Qué número continúa?

2; 3; 5; 7; 11; 13

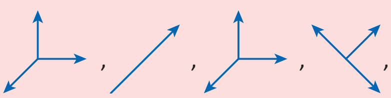
A) 15 B) 17 C) 19 D) 16 E) 14

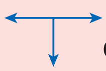
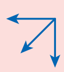
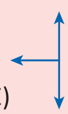
12. Halla la figura que continúa.

 , ...

A)  B)  C)  D)  E) 

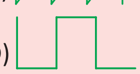
13. ¿Qué figura sigue?

 , ...

A) B)  C) D)  E) 

14. ¿Qué figura continúa?

 , ...

A)  B)  C) 
D)  E) 

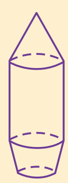
Claves

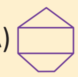
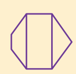
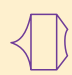
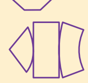
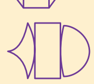
1. D	5. E	9. C	13. D
2. B	6. D	10. A	14. A
3. B	7. C	11. B	
4. B	8. A	12. E	

Reto



¿Cuál de las alternativas corresponde al desarrollo del siguiente sólido?



A)  B)  C) 
D)  E) 

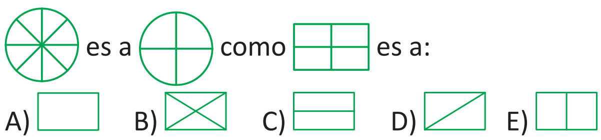
Rpta.: D

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. $\frac{6}{4}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{5}$, ...

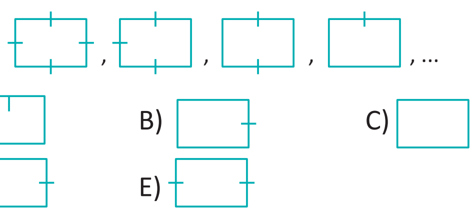
A) $\frac{8}{2}$ B) $\frac{9}{3}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{5}{6}$

2. 

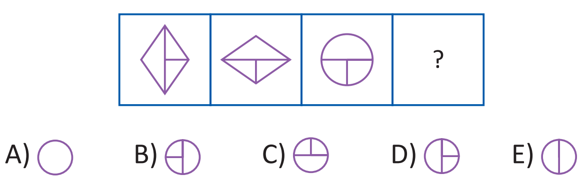
3. ¿Qué día fue el ayer de pasado mañana si hoy es miércoles?

A) Jueves B) Martes C) Lunes
D) Sábado E) Viernes

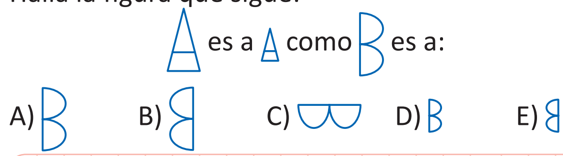
4. ¿Qué figura continúa?



5. Halla la figura que sigue.



6. Halla la figura que sigue:

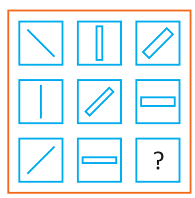


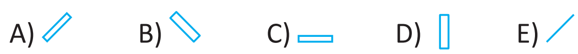
7. ¿Cuál es el número que falta?

1; 4; 8; 13; __; 26

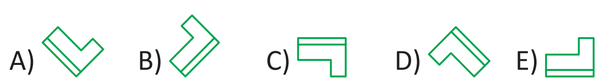
A) 15 B) 17 C) 19 D) 18 E) 21

8. ¿Qué figura falta?

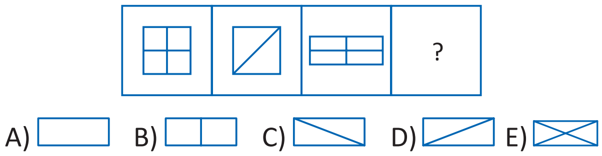




9. ¿Cuál de las figuras no guarda relación con las demás?

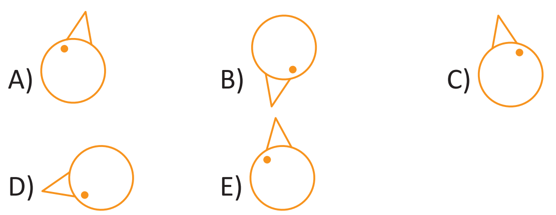


10. Halla la figura que sigue.

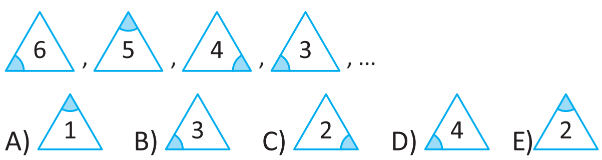


NIVEL 2

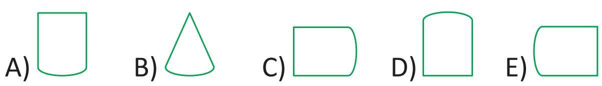
11. ¿Cuál de las figuras no guarda relación con la demás?



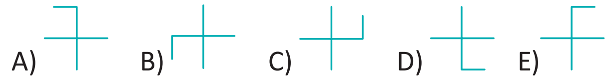
12. ¿Qué figura continúa?



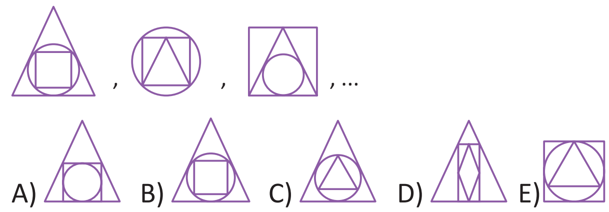
13. ¿Cuál de los siguientes gráficos no concuerda con el grupo?



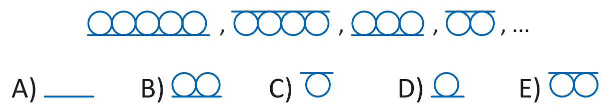
14. ¿Qué figura no guarda relación con los demás?



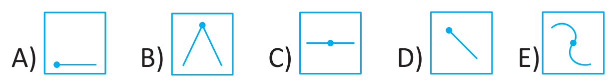
15. ¿Qué figura continúa?



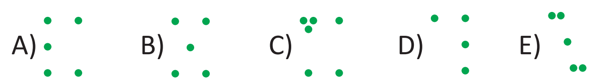
16. ¿Qué figura continúa?



17. ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



18. ¿Que figura no guarda relación con las otras?



19 Si hoy es lunes, qué día será pasado mañana de mañana de antes de ayer?

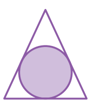
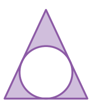
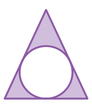
A) Jueves B) Martes C) Sábado
D) Lunes E) Viernes

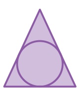
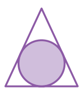
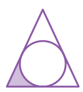
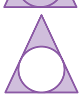
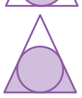
20 Marca la figura que corresponda.

 es a  como  es a...

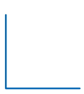
A)  B)  C) 
D)  E) 

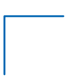
NIVEL 3

21  es a  como  es a:

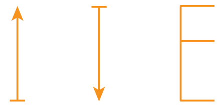
A)  B)  C) 
D)  E) 

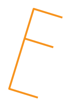
22 Completa la analogía:

 es a: , como  es a:

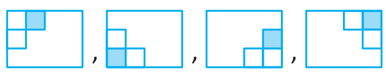
A)  B)  C)  D)  E)

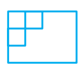
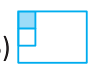
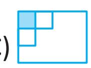
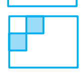
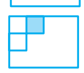
23 1 es a 2 como 3 es a:



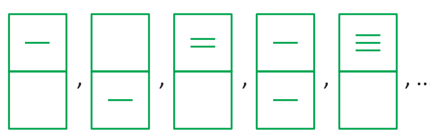
A)  B)  C) 
D)  E) 

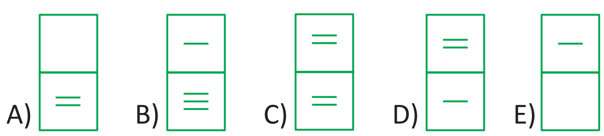
24 ¿Qué figura continúa?



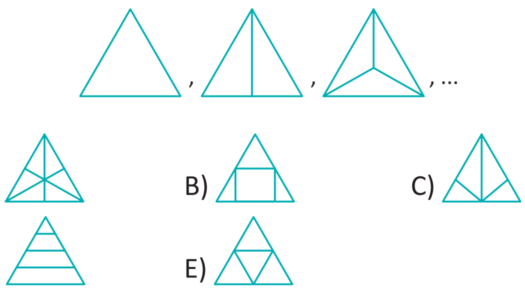
A)  B)  C) 
D)  E) 

25 ¿Qué figura continúa?

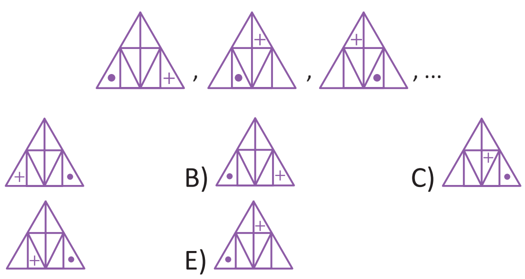




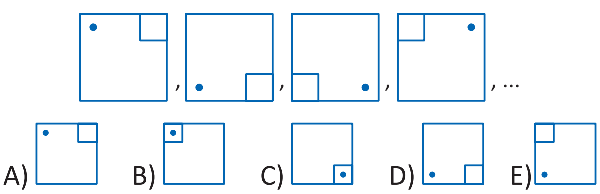
26 ¿Qué figura continúa?



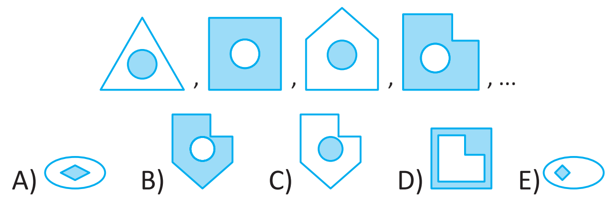
27 ¿Qué figura continúa?



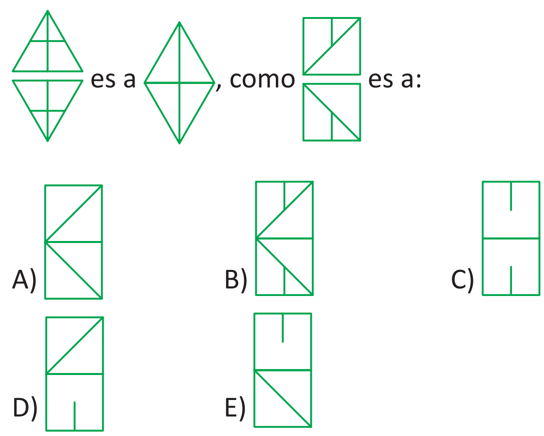
28 ¿Qué figura continúa?



29 ¿Qué figura continúa?



30



Claves

NIVEL 1

1. A
2. A
3. A
4. C
5. B
6. D
7. C
8. B
9. C
10. D

NIVEL 2

11. C
12. E
13. B
14. E
15. B
16. D
17. E
18. C
19. B
20. C

NIVEL 3

21. B
22. C
23. B
24. E
25. D
26. E
27. A
28. A
29. C
30. A